

# AUTOUR DES ÉQUATIONS DES VAGUES

MARISSAËL Alexis

Stage de recherche encadré par Benjamin MELINAND et Raphaël CÔTE

au sein de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université de Strasbourg

Printemps et été 2025

Après l'équation des ondes, les équations des vagues énoncées par Euler au XVIII<sup>ème</sup> siècle font partie des toutes premières équations faisant intervenir des dérivées partielles. Elles ont depuis largement été utilisées en mécanique des fluides essentiellement, mais n'ont été analysées en mathématiques que bien plus récemment, et restent complexes à utiliser en pratique.

L'objectif de ce stage est de présenter ces équations des vagues dans un cadre particulier précis, d'en établir des modèles asymptotiques plus simples lorsque certains paramètres sont petits et de justifier le caractère bien posé de l'un de ces modèles. Ces systèmes approximant les équations de vagues s'avèrent particulièrement utiles au delà de l'étude théorique mathématique associée, par exemple pour l'étude océanographique des littoraux.

Dans ce rapport, nous commençons par introduire les hypothèses physiques que l'on considère et les équations des vagues dans ce cadre. Ensuite, nous modifions ces équations en les adimensionnant, les redressant puis les dérivant afin d'en obtenir des modèles asymptotiques, éventuellement à paramètres. Nous justifions alors le caractère bien posé du système de Boussinesq qui est l'un de ces modèles obtenu. Enfin, nous proposons une dérivation de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) à partir d'un développement BKW de ce système, ce qui sera utile pour le sujet de thèse prolongeant ce stage.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Étude des équations des vagues</b>	<b>4</b>
I.1	Hypothèses physiques et équations des vagues . . . . .	4
I.2	Adimensionnement des équations . . . . .	7
I.3	Redressement des équations . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Construction de modèles asymptotiques</b>	<b>11</b>
II.1	Utilisation de la vitesse moyenne horizontale . . . . .	11
II.2	Dérivation à faible profondeur : vers un premier modèle asymptotique . . . . .	16
II.3	Ajout de paramètres . . . . .	17
<b>III</b>	<b>Caractère bien posé du système de Boussinesq</b>	<b>20</b>
III.1	Changement de variables et résultats préliminaires . . . . .	20
III.2	Cas linéaire et inégalités d'énergie . . . . .	23
III.3	Fin de la justification de l'existence locale . . . . .	32
III.4	Retour sur le problème avant changement de variables . . . . .	34
<b>IV</b>	<b>Dérivation de KdV par un développement BKW du système de Boussinesq</b>	<b>35</b>

**Notations :**

- Pour  $f$  fonction de trois variables  $t, x$  et  $z$ , on note  $\nabla_{x,z}f$  son gradient pris pour les deux variables spatiales et  $\Delta_{x,z}f := \partial_x^2 f + \partial_z^2 f$  son laplacien spatial.
- Le produit scalaire canonique entre deux vecteurs  $a$  et  $b$  de même taille est simplement noté  $a \cdot b$ .
- $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  désigne les fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.
- On notera  $C(\cdot)$  pour indiquer une constante qui ne dépend que des paramètres en argument.
- Pour  $s \in \mathbb{N}$ ,  $H^s$  désigne l'espace de Sobolev des fonctions de la variable réelle (on note  $H^s$  pour désigner  $H^s(\mathbb{R})$ ).
- La norme de Sobolev de  $f \in H^s$  est donnée par  $\|f\|_{H^s} := \|\Lambda^s f\|_{L^2}$  où  $\Lambda := (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ .
- Pour  $f$  et  $g$  dans  $L^2$ , on note  $\langle f | g \rangle := \int_{\mathbb{R}} fg$  leur produit scalaire dans  $L^2$ .
- La transformée de Fourier de  $f \in L^2$  est notée  $\hat{f} : \forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$ .
- Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on notera  $a \lesssim b$  pour signifier qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $a \leq Cb$ .
- $\tilde{0}$  désigne la fonction identiquement nulle.

Les autres notations apparaissant dans ce rapport seront précisées au fur et à mesure du document.

# I Étude des équations des vagues

## I.1 Hypothèses physiques et équations des vagues

Commençons par introduire les hypothèses physiques que l'on considère pour ce travail et les équations des vagues écrites sous ces hypothèses en se basant sur le livre de Lannes [7].

On considère ici un fluide en mouvement et soumis à la gravité dans un domaine du plan délimité par le bas par un fond plat et par le haut par sa frontière supérieure que l'on suppose libre. L'exemple le plus parlant de cette situation est celui du domaine occupé par une coupe de l'océan avec un fond plat.

On fait les hypothèses physiques suivantes : le fluide est homogène, non visqueux, incompressible et irrotationnel. De plus, on suppose que la surface supérieure peut être paramétrée par un graphe, qu'il n'y a pas de tension à la surface, que la pression externe est constante et que le fluide est au repos à l'infini. On admet ici que ces hypothèses conduisent à l'équation d'Euler, résultat de mécanique des fluides que l'on introduit dans la suite.

On note  $\Omega_t$  le domaine du plan occupé à l'instant  $t$ ,  $x$  la variable donnant la position horizontale d'une particule de ce fluide à cet instant et  $z$  sa position verticale.  $U(t, x, z) \in \mathbb{R}^2$  est la vitesse de la particule ayant pour coordonnées  $(x, z)$  et  $P(t, x, z)$  la pression en ce lieu au temps  $t$ . On suppose qu'il existe  $H_0 > 0$  et une fonction  $\zeta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tels que pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Omega_t = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, -H_0 < z < \zeta(t, x)\}$ . L'accélération de la pesanteur est notée  $-g\vec{e}_z$  où  $g > 0$  et  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire de l'axe des  $z$  dirigé vers le haut. On note  $\rho$  la densité du fluide supposée constante. La figure 1 résume la situation.

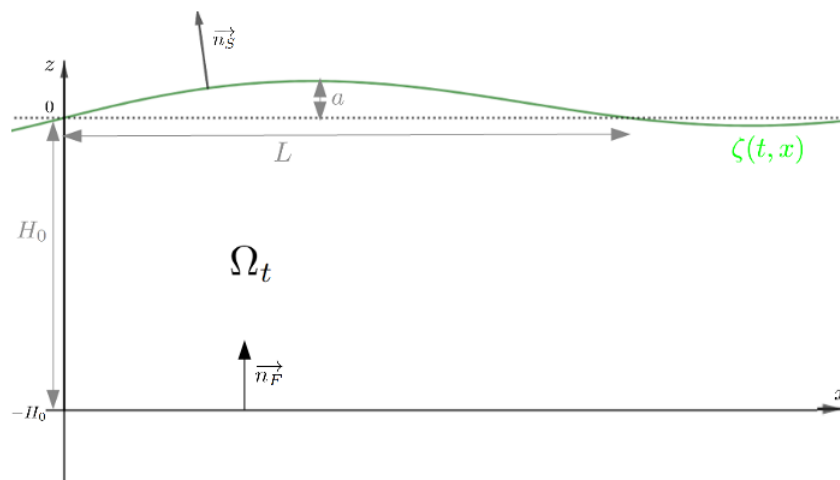


FIGURE 1 – Domaine occupé par le fluide à l'instant  $t$

On admet qu'avec les hypothèses énoncées précédemment,  $U$  vérifie dans  $\Omega_t$  :

$$\partial_t U + (U \cdot \nabla_{x,z})U = \frac{-1}{\rho} P - g \vec{e}_z \text{ (équation d'Euler), } \operatorname{div}(U) = 0 \text{ et } \operatorname{rot}(U) = 0.$$

De plus, toujours dans  $\Omega_t$ ,  $U \cdot \vec{n}_F = 0$  sur  $\{z = -H_0\}$ , où  $\vec{n}_F$  désigne le vecteur unitaire normal au fond plat et  $\partial_t \zeta - \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} U \cdot \vec{n}_S = 0$  sur  $\{z = \zeta(t, x)\}$ , où  $\vec{n}_S$  est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers le haut (voir figure 1), car on suppose qu'il n'y pas de traversée du fond et de la surface par les particules du fluide étudié. Enfin, on fait l'hypothèse qu'il existe une constante  $P_{atm} > 0$  (la pression supérieure, de l'atmosphère) telle que  $P = P_{atm}$  sur  $\{z = \zeta(t, x)\}$  et qu'il existe  $H_{min} > 0$  telle que :  $\forall(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,  $H_0 + \zeta(t, x) \geq H_{min}$ .

Avec ces hypothèses, l'équation d'Euler se ramène en fait à l'équation de Bernoulli en introduisant un potentiel de la vitesse :

**Proposition I.1 (Potentiel vitesse)**

Il existe  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$  tel que, dans  $\Omega_t$ , on a :

$$U = \nabla_{x,z} \Phi, \Delta_{x,z} \Phi = 0 \text{ et } \partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla_{x,z} \Phi|^2 + gz = \frac{-1}{\rho} (P - P_{atm}).$$

De plus,  $\partial_{n_F} \Phi = 0$  sur  $\{z = -H_0\}$  et  $\partial_t \zeta - \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} \partial_{n_S} \Phi = 0$  sur  $\{z = \zeta(t, x)\}$ .

**Démonstration :** En effet, en définissant  $\Phi$  par :  $U = \nabla_{x,z} \Phi$ , ce qui est possible car le fluide est supposé irrotationnel, et en réécrivant l'équation d'Euler sous la forme  $\nabla_{x,z} (\partial_t \Phi + \Phi \nabla_{x,z} \Phi + \frac{1}{\rho} P + gz) = 0$ , on en déduit en intégrant par rapport aux variables d'espace  $x$  et  $z$  (sur  $\Omega_t$ ) que :

$$\partial_t \left( \int_{\Omega_t} \nabla_{x,z} \Phi \right) + \frac{1}{2} |\nabla_{x,z} \Phi|^2 + gz = \frac{-1}{\rho} (P - P_{atm}), \text{ d'où :}$$

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla_{x,z} \Phi|^2 + gz = \frac{-1}{\rho} (P - P_{atm}).$$

Les autres propriétés sont immédiates puisque  $U = \nabla_{x,z} \Phi$ ,  $\operatorname{div}(U) = 0$  et en utilisant les définitions de  $\partial_{n_F}$  et  $\partial_{n_S}$  avec les hypothèses sur les bords de  $\Omega_t$ . □

Ainsi, en notant  $\psi := \Phi|_{z=\zeta}$ , le potentiel  $\Phi$  est solution du système :

$$\begin{cases} \Delta_{x,z} \Phi = 0 \text{ dans } \Omega_t, \\ \Phi|_{z=\zeta} = \psi ; \partial_{n_F} \Phi|_{z=-H_0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

C'est une équation de Laplace dont les conditions au bord sont de Dirichlet à la surface et de Neumann au fond. On peut montrer avec les hypothèses faites ici que le problème est bien posé : cela est fait en détails dans le chapitre 2 de [7]. Pour trouver la vitesse  $U$ , il suffit donc de résoudre ce problème mais il nous faut au préalable connaître  $\zeta$  et  $\psi$ . Dans ce but, on introduit l'opérateur suivant :

**Définition I.2 (Opérateur de Dirichlet-Neumann)**

On note  $G[\zeta] : \psi \mapsto \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} \partial_{n_S} \Phi|_{z=\zeta}$  l'opérateur de Dirichlet-Neumann, où  $\Phi$  est solution de (1).

**Lemme I.3**

Pour  $\Phi$  solution de (1), on a les relations :

$$(\partial_t \Phi)|_{z=\zeta} = \partial_t \psi - (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_t \zeta, \quad (\partial_x \Phi)|_{z=\zeta} = \partial_x \psi - (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_x \zeta \quad \text{et} \quad (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} = \frac{G[\zeta] \psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi}{1 + (\partial_x \zeta)^2}.$$

**Démonstration :** Par la règle de la chaîne, on a  $\partial_t(\Phi|_{z=\zeta}) = (\partial_t \Phi)|_{z=\zeta} + (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_t \zeta$ , ce qui donne la première identité puisque  $\Phi|_{z=\zeta} = \psi$ . La deuxième s'obtient exactement de la même façon en prenant les dérivées partielles par rapport à  $x$  au lieu de  $t$ . Pour obtenir la dernière, on a besoin d'exprimer les coordonnées du vecteur normal  $\vec{n}_S$ . Pour cela, on note  $\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$  la courbe paramétrée donnée par  $\zeta$  avec  $z(s) = \zeta(x(s))$  sur la surface et on dérive par rapport au paramètre  $s : z'(s) = x'(s) \partial_x \zeta(x(s))$ .

En prenant  $s = 0$  en particulier et en prenant  $x(0) = 1$ , on en déduit que le vecteur  $\vec{t}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x \zeta \end{pmatrix}$  est tangent à la courbe  $\gamma$  donnée par l'équation  $z = \zeta(t, x)$ . Par conséquent,  $\vec{n}_S$  étant orthogonal à  $\vec{t}_2$ , unitaire et dirigé vers le haut, on obtient :

$$\vec{n}_S = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x \zeta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi,}$$

$$G[\zeta] \psi = \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} \partial_{n_S} \Phi|_{z=\zeta} = \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} (\nabla_{x,z} \Phi)|_{z=\zeta} \cdot \vec{n}_S = \begin{pmatrix} (\partial_x \Phi)|_{z=\zeta} \\ (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_x \zeta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\partial_x \zeta (\partial_x \psi - (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_x \zeta) + (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta},$$

où la dernière égalité s'obtient par la deuxième identité établie dans ce lemme.

Dès lors,  $G[\zeta] \psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi = (1 + (\partial_x \zeta)^2) (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}$  après avoir développé l'expression précédente, d'où  $(\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} = \frac{G[\zeta] \psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi}{1 + (\partial_x \zeta)^2}$ . □

On peut maintenant vérifier que  $\psi$  et  $\zeta$  sont solutions d'un système d'équations indépendant de  $\Phi$ .

**Théorème I.4 (Équations des vagues)**

Avec les notations précédentes,  $(\zeta, \psi)$  est solution du système d'équations scalaires :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G[\zeta] \psi = 0, \\ \partial_t \psi + g \zeta + \frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{(G[\zeta] \psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi)^2}{2(1 + (\partial_x \zeta)^2)} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

**Démonstration :** D'après la proposition I.1, sur  $\{z = \zeta(t, x)\}$ , on a  $\partial_t \zeta - \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} \partial_{n_S} \Phi = 0$  donc, par définitions de  $\zeta$  et  $G[\zeta] \psi$ , on obtient directement  $\partial_t \zeta - G[\zeta] \psi = 0$ .

Pour la deuxième équation, on repart de l'équation vérifiée par  $\Phi$  obtenue dans cette même proposition :

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla_{x,z} \Phi|^2 + g z = \frac{-1}{\rho} (P - P_{atm}) \quad \text{et on regarde sa restriction à } \{z = \zeta(t, x)\}.$$

Comme  $P = P_{atm}$  sur cette surface, on a alors :  $(\partial_t \Phi)|_{z=\zeta} + \frac{1}{2} |\nabla_{x,z} \Phi|^2|_{z=\zeta} + g\zeta = 0$ .

On utilise ensuite le lemme I.3 pour obtenir :

$$\partial_t \psi - (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_t \zeta + g\zeta + \frac{1}{2} (\partial_x \Phi)|_{z=\zeta}^2 + \frac{1}{2} (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}^2 = 0 \text{ puis}$$

$$\partial_t \psi + g\zeta - (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_t \zeta + \frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 - \partial_x \psi (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_x \zeta + \frac{1}{2} (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}^2 (\partial_x \zeta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}^2 = 0$$

donc, en factorisant par  $(\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}$  et  $\frac{1}{2} (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}^2$ , on a :

$$\partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 - (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} (\partial_t \zeta + \partial_x \psi \partial_x \zeta) + \frac{1}{2} (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}^2 ((\partial_x \zeta)^2 + 1) = 0.$$

Or, on a vu que  $\partial_t \zeta = G[\zeta]\psi$  et  $(\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} = \frac{G[\zeta]\psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi}{1 + (\partial_x \zeta)^2}$  par le lemme I.3 donc il reste :

$$\partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{(G[\zeta]\psi + \partial_x \psi \partial_x \zeta)^2}{1 + (\partial_x \zeta)^2} + \frac{(G[\zeta]\psi + \partial_x \psi \partial_x \zeta)^2}{2(1 + (\partial_x \zeta)^2)} = 0.$$

Cela donne la seconde équation vérifiée par  $\zeta$  et  $\psi$  :  $\partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} (\partial_x \psi)^2 - \frac{(G[\zeta]\psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi)^2}{2(1 + (\partial_x \zeta)^2)} = 0$ .  $\square$

## I.2 Adimensionnement des équations

Après avoir établi les équations des vagues, nous allons dans cette sous-partie chercher à les écrire de manière adimensionnée dans l'idée de pouvoir travailler avec des paramètres sans dimension et petits en pratique. Pour cela, on commence par introduire les grandeurs physiques suivantes, caractéristiques du fluide étudié :

- On rappelle que  $H_0$  désigne la profondeur caractéristique du fluide considéré.
- On note  $L$  l'échelle caractéristique de propagation horizontale (que l'on suppose uniforme par rapport à la profondeur).
- $a$  désigne l'ordre d'amplitude de la surface.

On peut alors considérer les grandeurs adimensionnées suivantes :

- On note  $\varepsilon := \frac{a}{H_0}$ , appelé paramètre de non-linéarité.
- On note  $\mu := \frac{H_0^2}{L^2}$ , appelé paramètre de faible profondeur.

Plus tard dans le travail, on fera les hypothèses physiques que  $\mu \ll 1$  (hypothèse de faible profondeur) et que  $\varepsilon = O(\mu)$  (hypothèse d'ondes longues). En particulier, on supposera toujours qu'il existe  $h_0 > 0$  tel que  $h := 1 + \varepsilon\zeta \geq h_0$  sur  $\mathbb{R}$ .

Afin d'adimensionner les équations des vagues, on définit les variables adimensionnées suivantes :

$$x' := \frac{x}{L}, \zeta' := \frac{\zeta}{a}, t' := \frac{t}{t_0}, \Phi' := \frac{\Phi}{\Phi_0} \text{ et } z' := \frac{z}{H_0}, \text{ avec les grandeurs constantes :}$$

$$t_0 := \frac{L}{\sqrt{gH_0}} \text{ et } \Phi_0 := aL\sqrt{\frac{g}{H_0}}.$$

Réécrivons l'opérateur de Dirichlet-Neumann de la définition 1.2 avec ces grandeurs sans dimension :

par définition,  $G[\zeta]\psi := \sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2} \partial_{n_S} \Phi|_{z=\zeta}$ . Or, d'après le lemme 1.3, on a :

$$(\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} = \frac{G[\zeta]\psi + \partial_x \zeta \partial_x \psi}{1 + (\partial_x \zeta)^2} \text{ donc}$$

$$G[\zeta]\psi = (1 + (\partial_x \zeta)^2)(\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} - \partial_x \zeta \partial_x \psi.$$

De plus,  $\partial_x \psi = (\partial_x \Phi)|_{z=\zeta} + (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} \partial_x \zeta$  par ce même lemme donc :

$$G[\zeta]\psi = (1 + (\partial_x \zeta)^2)(\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} - \frac{(\partial_x \zeta)^2 (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta}}{1 + (\partial_x \zeta)^2} - \partial_x \zeta (\partial_x \Phi)|_{z=\zeta}.$$

$$\text{Ainsi, } G[\zeta]\psi = (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} - \partial_x \zeta (\partial_z \Phi)|_{z=\zeta} = \Phi_0 \times \left( (\partial_z \Phi')|_{z=\zeta} - \partial_x \zeta (\partial_x \Phi')|_{z=\zeta} \right).$$

Ensuite, on observe que  $\partial_z \Phi = \frac{1}{H_0} \partial_{z'} \Phi'$  et  $z = \zeta \Leftrightarrow H_0 z' = \zeta' a \Leftrightarrow z' = \varepsilon \zeta'$  par définitions des grandeurs

que l'on vient d'introduire. On obtient donc :  $G[\zeta]\psi = \Phi_0 \left( \left( \frac{\partial_{z'} \Phi'}{H_0} \right) \Big|_{z'=\varepsilon \zeta'} - \partial_x \zeta (\partial_x \Phi')|_{z=\zeta} \right)$ , avec :

$$\partial_x \zeta (\partial_x \Phi')|_{z=\zeta} = \frac{a}{L} \partial_{x'} \zeta' \times \frac{1}{L} (\partial_{x'} \Phi')|_{z'=\varepsilon \zeta'} = \frac{\varepsilon \mu}{H_0^2} \partial_{x'} \zeta' (\partial_{x'} \Phi')|_{z'=\varepsilon \zeta'}.$$

$$\text{Par conséquent, } G[\zeta]\psi = \frac{\Phi_0}{H_0} (\partial_{z'} \Phi' - \mu \partial_{x'} (\varepsilon \zeta') \partial_{x'} \Phi')|_{z'=\varepsilon \zeta'}.$$

$$\text{On peut donc noter } G[\zeta]\psi = \frac{\Phi_0}{H_0} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta'] \psi' \text{ où } \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta'] \psi' := \sqrt{1 + (\partial_{x'} (\varepsilon \zeta'))^2} \partial'_{n_S} \Phi'|_{z'=\varepsilon \zeta'}.$$

Ici,  $\Phi'$  est solution de la version adimensionnée du système (1) :

$$\begin{cases} \Delta'_{x,z} \Phi' = 0 \text{ si } z' \in [-1, \varepsilon \zeta'], \\ \Phi'|_{z'=\varepsilon \zeta'} = \psi'; \quad \partial'_{n_F} \Phi'|_{z'=-1} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

où l'opérateur  $\Delta'_{x,z}$  est défini par :  $\Delta'_{x,z} f := \mu \partial_{x'}^2 f + \partial_{z'}^2 f$ , c'est pourquoi l'opérateur  $\mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta']$  dépend de  $\mu$ .

On peut maintenant donner la formulation adimensionnée des équations des vagues, que l'on énonce sans noter les primes pour en améliorer la lisibilité :

**Proposition 1.5 (Équations des vagues adimensionnées)**

Après adimensionnement,  $(\zeta, \psi)$  est solution du système d'équations scalaires :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - \frac{1}{\mu} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta] \psi = 0, \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} (\partial_x \psi)^2 - \varepsilon \mu \frac{(\frac{1}{\mu} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta] \psi + \partial_x (\varepsilon \zeta) \partial_x \psi)^2}{2(1 + \varepsilon^2 \mu (\partial_x \zeta)^2)} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

**Démonstration :** Pour cette démonstration, on conserve les notations avec les primes pour indiquer les grandeurs adimensionnées et sans pour les grandeurs qui ne le sont pas.

Commençons par montrer la première équation. On sait d'après le théorème 1.4 que  $\partial_t \zeta - G[\zeta]\psi = 0$  donc,

en passant aux grandeurs sans dimension,  $\partial_t (a \zeta') - \frac{\Phi_0}{H_0} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta'] \psi' = 0$  puis  $\partial_{t'} \zeta' - \frac{\Phi_0 t_0}{H_0 a} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta'] \psi' = 0$  par définition de  $t'$ . Il suffit alors de réécrire la fraction  $\frac{\Phi_0 t_0}{H_0 a} = \frac{L}{\sqrt{H_0 a}} \times \frac{\phi L}{H_0^2} \times \frac{\sqrt{g H_0}}{H_0 \phi} = \frac{L^2}{H_0^2} = \frac{1}{\mu}$ , d'où

$$\partial_{t'}\zeta' - \frac{1}{\mu}\mathcal{G}_\mu G[\varepsilon\zeta']\psi' = 0.$$

Pour obtenir la deuxième équation, on part de :

$$\partial_t\psi + g\zeta + \frac{1}{2}(\partial_x\psi)^2 - \frac{(G[\zeta]\psi + \partial_x\zeta\partial_x\psi)^2}{2(1 + (\partial_x\zeta)^2)} = 0 \text{ donné par (2) et on suppose qu'il existe une constante } \alpha \text{ (à}$$

déterminer) telle que  $\psi' = \alpha\psi$ . En passant aux grandeurs adimensionnées, on obtient :

$$\frac{1}{t_0\alpha}\partial_{t'}\psi' + ga\zeta' + \frac{1}{2L^2\alpha^2}(\partial_{x'}\psi')^2 - \frac{(\frac{\Phi_0}{H_0}\mathcal{G}_\mu[\varepsilon\zeta']\psi' + \frac{a}{L}\partial_{x'}\zeta'\frac{1}{\alpha L}\partial_{x'}\psi')^2}{2(1 + \varepsilon^2\mu(\partial_{x'}\zeta')^2)} = 0.$$

Cela ressemble bien à l'expression cherchée. On multiplie alors l'équation par  $t_0\alpha$  :

$$\partial_{t'}\psi' + gat_0\alpha\zeta' + \frac{t_0}{2L^2\alpha}(\partial_{x'}\psi')^2 - \varepsilon\mu\frac{(\frac{\Phi_0\sqrt{t_0\alpha}}{H_0\sqrt{\varepsilon\mu}}\mathcal{G}_\mu[\varepsilon\zeta']\psi' + \frac{a\sqrt{t_0}}{L^2\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon\mu}}\partial_{x'}(\varepsilon\zeta')\partial_{x'}\psi')^2}{2(1 + \varepsilon^2\mu(\partial_{x'}\zeta')^2)} = 0 \text{ puis on vérifie que les}$$

constantes qui apparaissent conviennent pour un  $\alpha$  bien choisi.

Par identification avec le résultat souhaité, on voudrait que  $\alpha$  vérifie les 4 identités suivantes :

$$gat_0\alpha = 1, \quad \frac{t_0}{2L^2\alpha} = \varepsilon, \quad \frac{\Phi_0\sqrt{t_0\alpha}}{H_0\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\mu} \text{ et } \frac{a\sqrt{t_0}}{L^2\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon\mu}} = 1.$$

En isolant  $\alpha$  dans ces 4 équations, on obtient respectivement :

$$\alpha = \frac{1}{gat_0}, \quad \alpha = \frac{t_0}{\varepsilon L^2}, \quad \alpha = \frac{H_0^2\varepsilon\mu}{\mu^2\Phi_0^2t_0} \text{ et } \alpha = \frac{a^2t_0}{L^4\varepsilon^2\mu}.$$

En utilisant les définitions de  $t_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\Phi_0$ , on obtient  $\alpha = \frac{1}{aL}\sqrt{\frac{H_0}{g}}$  à chaque fois.

Ainsi, on a  $\psi' = \frac{1}{aL}\sqrt{\frac{H_0}{g}}\psi$  et on a vérifié que la deuxième équation se réécrit bien sous la forme :

$$\partial_{t'}\psi' + \zeta' + \frac{\varepsilon}{2}(\partial_{x'}\psi')^2 - \varepsilon\mu\frac{(\frac{1}{\mu}\mathcal{G}_\mu[\varepsilon\zeta']\psi' + \partial_{x'}(\varepsilon\zeta')\partial_{x'}\psi')^2}{2(1 + \varepsilon^2\mu(\partial_{x'}\zeta')^2)} = 0. \quad \square$$

Dans toute la suite, on travaillera donc avec les équations des vagues adimensionnées (4) en omettant les primes pour alléger l'écriture.

### I.3 Redressement des équations

Le domaine  $\Omega_t$  occupé par le fluide à l'instant  $t$  n'étant pas très pratique à utiliser, on va maintenant chercher à se ramener à un domaine plus simple. On pourrait faire des redressements théoriques généraux (comme dans le chapitre 2 de [7]) mais on se contente ici d'un redressement par un difféomorphisme particulier donnant une surface plate pour se ramener au domaine  $\mathcal{S}$  décrit par la figure 2.

Pour faire ce redressement, on considère, à un temps fixé, les deux domaines  $\Omega$  et  $\mathcal{S}$  et le difféomorphisme  $\Sigma : \mathcal{S} \rightarrow \Omega$  défini par :  $\Sigma(x, z) := (x, z + \varepsilon\zeta(1 + z))$  où on rappelle que  $\zeta$  dépend de  $x$  (puisque  $\zeta$  définit la surface du fluide). On repart de l'équation (1) vérifiée par le potentiel  $\Phi$  mais dans sa version

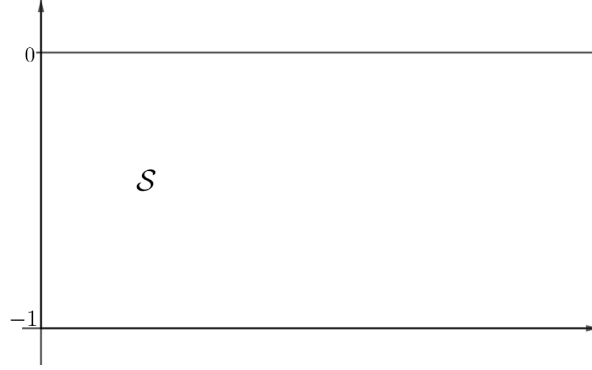


FIGURE 2 – Domaine redressé occupé par le fluide

adimensionnée :

$$\begin{cases} \Delta_{x,z} \Phi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Phi|_{z=\varepsilon\zeta} = \psi ; \partial_{n_F} \Phi|_{z=-1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

On suppose que  $\partial_x \Phi \in L^2(\Omega)$  et on note  $\phi := \Phi \circ \Sigma$ , ce qui donne :  $\phi(t, x, z) = \Phi(t, x, z + \varepsilon\zeta(t, x)(z + 1))$ .

**Proposition I.6**

Le potentiel redressé  $\phi$  vérifie :

$$\begin{cases} \nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu \phi = 0, \\ \phi|_{z=0} = \psi ; \partial_{n_F} \phi|_{z=-1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où  $\nabla_{x,z}^\mu := \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix}$  et  $P(\Sigma) := \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\zeta & -\sqrt{\mu} \varepsilon (z + 1) \partial_x \zeta \\ -\sqrt{\mu} \varepsilon (z + 1) \partial_x \zeta & \frac{1 + \mu \varepsilon^2 (z + 1)^2 (\partial_x \zeta)^2}{1 + \varepsilon\zeta} \end{pmatrix}$ .

**Démonstration :** Commençons par exprimer les dérivées partielles de  $\phi$  en fonction de celles de  $\Phi$  :

$$\partial_x \phi = \partial_x \Phi \circ \Sigma + (z + 1) \varepsilon \partial_x \zeta \partial_z \Phi \circ \Sigma, \quad \partial_z \phi = (1 + \varepsilon\zeta) \partial_z \Phi \circ \Sigma \text{ et } \partial_t \phi = \partial_t \Phi \circ \Sigma + (z + 1) \varepsilon \partial_t \zeta \partial_z \Phi \circ \Sigma.$$

$$\text{En particulier, on en déduit que } \nabla_{x,z}^\mu \Phi \circ \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \partial_x \phi - \sqrt{\mu} \frac{(z + 1) \varepsilon \partial_x \zeta}{1 + \varepsilon\zeta} \partial_z \phi \\ \frac{1}{1 + \varepsilon\zeta} \partial_z \phi \end{pmatrix}.$$

On cherche ensuite à déterminer  $\Delta_{x,z}^\mu \Phi$  en calculant la divergence du gradient précédent.

Pour ne pas alourdir les notations, on introduit des fonctions  $f$  et  $F$  telles que  $f = F \circ \Sigma$ .

$$\text{On a donc } \nabla_{x,z}^\mu \cdot F = \sqrt{\mu} \partial_x F_x + \partial_z F_z$$

$$\nabla_{x,z}^\mu \cdot F = \sqrt{\mu} \partial_x f_x - \sqrt{\mu} \frac{(z + 1) \varepsilon \partial_x \zeta}{1 + \varepsilon\zeta} \partial_z f_x + \frac{1}{1 + \varepsilon\zeta} \partial_z f_z \text{ d'après ce qui précède}$$

$$\nabla_{x,z}^\mu \cdot F = \frac{1}{1 + \varepsilon\zeta} \left( \sqrt{\mu} \partial_x f_x + \sqrt{\mu} \partial_x (\varepsilon \zeta f_x) - \sqrt{\mu} \partial_z ((z + 1) \varepsilon \partial_x \zeta f_x) + \partial_z f_z \right).$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mu}\partial_x f_x + \sqrt{\mu}\partial_x(\varepsilon\zeta f_x) - \sqrt{\mu}\partial_z((z+1)\varepsilon\partial_x\zeta f_x) + \partial_z f_z = \\ & \sqrt{\mu}\partial_x f_x + \sqrt{\mu}\varepsilon\partial_x\zeta f_x + \sqrt{\mu}\varepsilon\zeta\partial_x f_x - \sqrt{\mu}\varepsilon\partial_x\zeta f_x - (z+1)\varepsilon\partial_x\zeta\partial_z f_x + \partial_z f_z. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire :  $\nabla_{x,z}^\mu \cdot F = \frac{1}{1+\varepsilon\zeta} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\zeta & 0 \\ -\sqrt{\mu}(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix}$ .

Ensuite, on reprend l'expression de  $\nabla_{x,z}^\mu \Phi \circ \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x\phi - \sqrt{\mu}\frac{(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta}{1+\varepsilon\zeta}\partial_z\phi \\ \frac{1}{1+\varepsilon\zeta}\partial_z\phi \end{pmatrix}$  que l'on peut réécrire

sous la forme  $\nabla_{x,z}^\mu \Phi \circ \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{\mu}(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta}{1+\varepsilon\zeta}\sqrt{\mu}\partial_x\phi \\ 0 & \frac{1}{1+\varepsilon\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}$ .

Finalement, en remplaçant les composantes de  $f$  par ces expressions, on obtient :

$$0 = \Delta_{x,z}^\mu \Phi \circ \Sigma = \nabla_{x,z}^\mu \cdot \nabla_{x,z}^\mu \Phi \circ \Sigma \text{ donc}$$

$$0 = \frac{1}{1+\varepsilon\zeta} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\zeta & 0 \\ -\sqrt{\mu}(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{\mu}(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta}{1+\varepsilon\zeta}\sqrt{\mu}\partial_x\phi \\ 0 & \frac{1}{1+\varepsilon\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}.$$

En multipliant cette identité par  $1+\varepsilon\zeta$  et en calculant le produit des deux matrices carrées, il vient :

$$0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\zeta & -\sqrt{\mu}(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta \\ -\sqrt{\mu}(z+1)\varepsilon\partial_x\zeta & \frac{1+\mu\varepsilon^2(z+1)^2(\partial_x\zeta)^2}{1+\varepsilon\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}\partial_x\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma)\nabla_{x,z}^\mu\phi = 0$  avec les notations introduites dans l'énoncé de la proposition.

Les conditions aux bords s'obtiennent de manière immédiate car  $\Sigma$  transforme  $\{z=0\}$  en  $\{z=\varepsilon\zeta\}$  et ne modifie pas  $\{z=-1\}$ . On obtient donc bien (5).  $\square$

On est ainsi parvenu à redresser l'équation de Laplace vérifiée par le potentiel  $\Phi$ . Cela sera utile pour dériver les équations des ondes et en obtenir des modèles asymptotiques.

## II Construction de modèles asymptotiques

### II.1 Utilisation de la vitesse moyenne horizontale

Dans cette sous-partie, on introduit la vitesse moyenne horizontale, déterminée à partir de la moyennisation verticale de cette vitesse, et on détermine les deux premiers termes de son développement asymptotique lorsque  $\mu \rightarrow 0$ . On retravaille temporairement avec le potentiel  $\Phi$  non redressé pour commencer puis on utilisera le potentiel  $\phi$  redressé ensuite.

### Définition II.1

Soient  $\Phi$  le potentiel vitesse adimensionné (solution de (3)) et  $h := 1 + \varepsilon\zeta$  (tel que  $h \geq h_0 > 0$ ).

La vitesse moyenne horizontale est définie par  $\bar{V} := \frac{1}{h} \int_{-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_x \Phi(\cdot, z) dz$ .

On peut aussi exprimer  $\bar{V}$  en fonction du potentiel redressé  $\phi$  : en utilisant le redressement fait dans la sous-partie précédente et le changement de variables  $(x, z) = \Sigma(x', z')$ , on obtient :

$$\bar{V} = \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \partial_x \Phi \circ \Sigma(1 + \varepsilon\zeta) dz = \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \partial_x \Phi \circ \Sigma(1 + \varepsilon\zeta) dz = \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \left( \partial_x \phi - \frac{(z+1)\varepsilon \partial_x \zeta}{1 + \varepsilon\zeta} \partial_z \phi \right) (1 + \varepsilon\zeta) dz$$

par l'expression de  $\partial_x \Phi \circ \Sigma$  établie dans la démonstration de la proposition I.6.

Cette vitesse moyenne horizontale peut être reliée à l'opérateur de Dirichlet-Neumann adimensionné par la proposition suivante :

### Proposition II.2

Pour  $\Phi$ ,  $\psi$  et  $\zeta$  suffisamment régulières, on a  $\mathcal{G}_\mu[\varepsilon\zeta]\psi = -\mu \partial_x(h\bar{V})$ .

**Démonstration :** Pour alléger les notations, on note dorénavant  $\mathcal{G}\psi := \mathcal{G}_\mu[\varepsilon\zeta]\psi$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Calculons  $\int_{\Omega} \Delta_{x,z}^\mu \Phi \varphi$  de deux façons différentes (où  $\Omega := \Omega_t$  à un temps  $t$  fixé).

D'une part,  $\Phi$  étant solution de (3), on a  $\Delta_{x,z}^\mu \Phi = 0$  donc  $\int_{\Omega} \Delta_{x,z}^\mu \Phi \varphi = 0$ .

D'autre part, la formule de Green donne :  $\int_{\Omega} \Delta_{x,z}^\mu \Phi \varphi = - \int_{\Omega} \nabla_{x,z}^\mu \Phi \cdot \nabla_{x,z}^\mu \varphi + \int_{\partial\Omega} \varphi \partial_n \Phi$  avec le dernier terme égal à  $\int_{\partial\Omega} \varphi \partial_n \Phi = \int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \partial_{n_S} \Phi + \int_{\{z=-1\}} \varphi \partial_{n_F} \Phi$  par définition de  $\Omega$ .

Or, d'après (3),  $\partial_{n_F} \Phi|_{z=-1} = 0$  donc le second terme est nul et on a vu dans la sous-partie sur l'adimensionnement des équations des vagues que  $\mathcal{G}\psi := \sqrt{1 + (\partial_x(\varepsilon\zeta))^2} \partial_{n_S} \Phi|_{z=\varepsilon\zeta}$  donc  $\int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \partial_{n_S} \Phi = \int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \mathcal{G}\psi$ .

Il reste donc :

$$\int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \mathcal{G}\psi = \int_{\Omega} \nabla_{x,z}^\mu \Phi \cdot \nabla_{x,z}^\mu \varphi.$$

Comme  $\varphi$  ne dépend que de  $x$  (pas de  $z$ ), cela se réécrit en fait :

$$\begin{aligned} \int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \mathcal{G}\psi &= \int_{\Omega} \sqrt{\mu} \partial_x \Phi \sqrt{\mu} \partial_x \varphi = \mu \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_x \Phi \partial_x \varphi = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \varphi(x) \int_{-1}^{\varepsilon\zeta} \partial_x(x, z) dz dx \text{ donc} \\ \int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \mathcal{G}\psi &= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \varphi \cdot h\bar{V} = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \partial_x(h\bar{V}) + 0 \text{ par intégration par parties (car } \varphi \text{ est à support compact)}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on a  $\int_{\{z=\varepsilon\zeta\}} \varphi \mathcal{G}\psi = -\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \partial_x(h\bar{V})$ , d'où  $\mathcal{G}\psi = -\mu \partial_x(h\bar{V})$ .  $\square$

Avec cette définition et cette proposition vérifiées par la vitesse moyenne horizontale  $\bar{V}$ , on pourra déterminer un développement asymptotique de  $\bar{V}$  à partir de celui du potentiel redressé  $\phi$ .

Dans la suite de cette sous-partie, on énonce les résultats avec un développement asymptotique à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$  quelconque (même si on n'aura besoin que du développement à l'ordre 1 par la suite). Aussi, on donne les estimations des restes associés à ces développements asymptotiques mais celles-ci n'étant pas l'objet essentiel de ce travail, on ne les démontre pas : on pourra en trouver une justification dans la sous-partie 3.6.1. de [7].

Soit  $\phi$  solution de (5). On cherche à approximer cette solution par  $\phi_{\text{app}}(x, z) = \sum_{j=0}^n \mu^j \phi_j(x, z)$  :

**Lemme II.3**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , il existe des fonctions  $\phi_0, \dots, \phi_n$  telles que chaque  $\phi_j$  (fonction de  $x$  et de  $z$ ) est polynomiale de degré  $2j$  en  $z$  et telles que  $\phi_{\text{app}} := \sum_{j=0}^n \mu^j \phi_j$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu \phi_{\text{app}} = \mu^{n+1} R_\mu, \\ \phi_{\text{app}}|_{z=0} = \psi ; \partial_{n_F} \phi_{\text{app}}|_{z=-1} = \mu^{n+1} r_\mu. \end{cases} \quad (6)$$

De plus, on a l'estimée  $\|\Lambda^s R_\mu\|_{L^2} + \|r_\mu\|_{H^s} \leq M \|\partial_x \psi\|_{H^{s+2n+1}}$ , où  $M$  est une constante qui ne dépend que de  $\zeta$ ,  $s \in \mathbb{N}$  et les fonctions  $\zeta$  et  $\psi$  sont supposées suffisamment régulières.

En particulier, on a  $\phi_0 = \psi$  et  $\phi_1 = -h^2 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \partial_x^2 \psi$ .

**Démonstration :** Commençons par observer que l'on peut réécrire l'opérateur  $\nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu$  sous la forme  $\nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu = \frac{1}{h} \partial_z^2 + \mu A(\partial_x, \partial_z)$  où  $A(\partial_x, \partial_z)$  est l'opérateur défini par, pour une fonction  $f$  (jouant le rôle d'un  $\phi_j$ ) :

$$A(\partial_x, \partial_z) f := \partial_x (h \partial_x f) + \partial_z \left( \frac{(\partial_x \sigma)^2}{h} \partial_z f \right) - \partial_x (\partial_x \sigma \partial_z f) - \partial_z (\partial_x \sigma \partial_x f) \text{ avec } \sigma(x, z) := \varepsilon \zeta(x)(z+1).$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu f &= \left( \frac{\sqrt{\mu} \partial_x}{\partial_z} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{\mu}(1 + \varepsilon \zeta) \partial_x f - \sqrt{\mu}(z+1) \varepsilon \partial_x \zeta \partial_z f}{-\sqrt{\mu}(z+1) \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x f + \frac{1 + \mu \varepsilon^2 (z+1)^2 (\partial_x \zeta)^2}{1 + \varepsilon \zeta} \partial_z f} \right) \text{ donc} \\ \nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu f &= \mu \partial_x ((1 + \varepsilon \zeta) \partial_x f - \varepsilon (z+1) \partial_x \zeta \partial_z f) - \mu \partial_z (\varepsilon (z+1) \partial_x \zeta \partial_x f) + \frac{1}{h} \partial_z^2 f + \mu \partial_z \left( \frac{\varepsilon^2 (z+1)^2 (\partial_x \zeta)^2}{1 + \varepsilon \zeta} \partial_z f \right). \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que :

$$A(\partial_x, \partial_z) f = \partial_x ((1 + \varepsilon \zeta) \partial_x f - \varepsilon (z+1) \partial_x \zeta \partial_z f) - \partial_z (\varepsilon (z+1) \partial_x \zeta \partial_x f) + \partial_z \left( \frac{\varepsilon^2 (z+1)^2 (\partial_x \zeta)^2}{1 + \varepsilon \zeta} \partial_z f \right).$$

Ceci est bien le cas car le membre de droite est égal à  $\partial_x (h \partial_x f) - \partial_x (\partial_x \sigma \partial_x f) - \partial_z (\partial_x \sigma \partial_x f) + \partial_z \left( \frac{(\partial_x \sigma)^2}{h} \partial_z f \right)$

par définition de  $\sigma(x, z) := \varepsilon \zeta(x)(z+1)$ .

Ensuite, on a vu dans la démonstration de la proposition I.6 que  $\partial_z \phi = (1 + \varepsilon \zeta) \partial_z \Phi \circ \Sigma$  (avec les notations de cette proposition) donc, ici,  $\partial_{n_F} f|_{z=-1} = \frac{1}{h} (\partial_z f)|_{z=-1}$ .

Injectons maintenant  $\phi_{\text{app}} := \sum_{j=0}^n \mu^j \phi_j$  dans le problème (5) réécrit en fonction de  $A$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu \phi_{\text{app}} &= \frac{1}{h} \partial_z^2 \phi_{\text{app}} + \mu A(\partial_x, \partial_z) \phi_{\text{app}} \\ &= \frac{1}{h} \partial_z^2 \phi_0 + \frac{1}{h} \mu \partial_z^2 \phi_1 + \frac{1}{h} \mu^2 \partial_z^2 \phi_2 + \cdots + \mu A(\partial_x, \partial_z) \phi_0 + \mu^2 A(\partial_x, \partial_z) \phi_1 + \cdots. \end{aligned}$$

On regroupe selon les puissances de  $\mu$  pour obtenir :

$$\nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu \phi_{\text{app}} = \frac{1}{h} \partial_z^2 \phi_0 + \sum_{j=1}^n \mu^j \left( \frac{1}{h} \partial_z^2 \phi_j + A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1} \right) + \mu^{n+1} A(\partial_x, \partial_z) \phi_n.$$

On veut que cette expression soit en  $O(\mu^n)$  donc il suffit que les  $\phi_j$  vérifient :

$$\partial_z^2 \phi_0 = 0 \text{ et } : \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{h} \partial_z^2 \phi_j = -A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1}.$$

De plus, on sait par (5) que  $\phi|_{z=0} = \psi$  et  $\partial_{n_F} \phi|_{z=-1} = 0$  donc, pour que  $\phi_{\text{app}}$  approche  $\phi$ , il faut aussi avoir  $\phi_0|_{z=0} = \psi$ ;  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \phi_j|_{z=0} = 0$  et  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \partial_z \phi_j|_{z=-1} = 0$ .

Montrons alors que  $\phi_0 = \psi$  et  $\phi_j = h \int_z^0 \int_{-1}^{z'} A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1} dz'' dz'$  pour tout  $j \geq 1$  : on sait que  $\partial_z^2 \phi_0 = 0$  donc  $\phi_0$  est de la forme  $\phi_0 = \alpha_x + z \beta_x$  et les conditions  $\phi_0|_{z=0} = \psi$  et  $\partial_z \phi_0|_{z=-1} = 0$  donnent que  $\alpha_x = \psi$  et  $\beta_x = 0$  nécessairement, d'où  $\phi_0 = \psi$ .

Pour obtenir la relation de récurrence, on intègre deux fois l'identité  $\frac{1}{h} \partial_z^2 \phi_j = -A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1}$  à  $j \in \mathbb{N}^*$  fixé : comme  $\partial_z \phi_j|_{z=-1} = 0$ , on a d'abord  $\partial_z \phi_j = \int_{-1}^z -h A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1} dz'$  puis, comme  $\phi_j|_{z=0} = 0$ , on a ensuite  $\phi_j = -h \int_0^z \int_{-1}^{z'} A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1} dz'' dz'$ , d'où  $\phi_j = h \int_z^0 \int_{-1}^{z'} A(\partial_x, \partial_z) \phi_{j-1} dz'' dz'$ . Cette expression permet en particulier de calculer  $\phi_1 = h \int_z^0 \int_{-1}^{z'} A(\partial_x, \partial_z) \psi dz'' dz'$ .

Pour cela, on utilise la définition de  $A(\partial_x, \partial_z)$  en sachant que  $\psi$  ne dépend pas de  $z$ . Il reste donc :

$$\phi_1 = h \int_z^0 \int_{-1}^{z'} \partial_x (h \partial_x \psi) + 0 - 0 - \partial_z (\varepsilon(z+1) \partial_x \zeta \partial_x \psi) dz'' dz' \text{ où l'intégrande ne dépend en fait pas de } z :$$

$$\phi_1 = h (\cancel{\varepsilon \partial_x \zeta \partial_x \psi} + h \partial_x^2 \psi - \cancel{\varepsilon \partial_x \zeta \partial_x \psi}) \int_z^0 \int_{-1}^{z'} 1 dz'' dz' = h^2 \partial_x^2 \psi \int_z^0 (z' + 1) dz' = -h^2 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \partial_x^2 \psi.$$

À partir de la relation donnant chaque  $\phi_j$  en fonction de  $\phi_{j-1}$ , on peut vérifier par récurrence que les  $\phi_j$  sont polynomiales de degré  $2j$  en  $z$ .

Finalement, il suffit de prendre  $R_\mu := \frac{1}{\mu^{n+1}} \nabla_{x,z}^\mu \cdot P(\Sigma) \nabla_{x,z}^\mu \phi_{\text{app}} = \frac{\mu^{n+1}}{\mu^{n+1}} A(\partial_x, \partial_z) \phi_n$ , c'est-à-dire

$R_\mu = A(\partial_x, \partial_z) \phi_n$  et  $r_\mu = 0$  pour obtenir (6) et conclure.

L'estimée peut également s'obtenir par récurrence (voir la sous-partie 3.6.1. de [7]).  $\square$

On peut en particulier remarquer que  $\phi_0$  ne dépend pas de  $z$  et que  $\phi_1$  dépend de  $z$  de façon quadratique.

Dans la suite, on considère l'opérateur  $\mathcal{T}[h]V := \frac{-1}{3h} \partial_x (h^3 \partial_x V)$ , toujours avec  $h := 1 + \varepsilon \zeta \geq h_0 > 0$  ( $h$  dépend donc de la variable  $x$ ). À partir du développement asymptotique de  $\phi$  que l'on vient d'obtenir, on

peut en déduire celui de  $\bar{V}$  (en particulier les expressions de ses deux premiers termes) :

**Proposition II.4 (Développement asymptotique de la vitesse moyenne horizontale)**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\zeta$  et  $\psi$  suffisamment régulières, il existe des fonctions  $\bar{V}_0, \dots, \bar{V}_n$  telles que :

$$\bar{V} = \sum_{j=0}^n \mu^j \bar{V}_j + O(\mu^n) \text{ avec } \bar{V}_0 = \partial_x \psi \text{ et } \bar{V}_1 = -\mathcal{T}[h] \partial_x \psi \left( \text{c'est-à-dire } \bar{V}_1 = \frac{-1}{3h} \partial_x (h^3 \partial_x \partial_x \psi) \right).$$

Plus précisément, pour chaque  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a les estimations :  $\|\bar{V}_j\|_{H^s} \leq M \|\partial_x \psi\|_{H^{s+2j}}$  et l'estimée du reste  $\|\bar{V} - \sum_{j=0}^n \mu^j \bar{V}_j\|_{H^s} \leq \mu^{n+1} \tilde{M} \|\partial_x \psi\|_{H^{s+2+2n}}$  où  $M$  et  $\tilde{M}$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $\zeta$ .

**Démonstration :** D'après la remarque indiquée après la définition de la vitesse moyenne horizontale,

on a  $\bar{V} = \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \left( \partial_x \phi - \frac{(z+1)\varepsilon \partial_x \zeta}{1+\varepsilon \zeta} \partial_z \phi \right) (1+\varepsilon \zeta) dz$ . De plus,  $h := 1 + \varepsilon \zeta$  donc :

$$\bar{V} = \frac{1}{h} \int_{-1}^0 (h \partial_x \phi - (z \partial_x h + \varepsilon \partial_x \zeta) \partial_z \phi) dz = \frac{1}{h} \int_{-1}^0 (h \partial_x \phi - (z \partial_x h + \varepsilon \partial_x \zeta) \partial_z \phi) dz.$$

Cette dernière expression permet alors de définir

$$\bar{V}_{\text{app}} := \sum_{j=0}^n \mu^j \bar{V}_j \text{ où } \bar{V}_j := \int_{-1}^0 \partial_x \phi_j - \frac{1}{h} (z \partial_x h + \varepsilon \partial_x \zeta) \partial_z \phi_j dz.$$

En faisant la différence, on obtient  $\bar{V} - \bar{V}_{\text{app}} = \int_{-1}^0 \partial_x u - \frac{1}{h} (z \partial_x h + \varepsilon \partial_x \zeta) \partial_z u dz$  où  $u := \phi - \phi_{\text{app}}$ .

En particulier, cela donne que  $\bar{V} - \bar{V}_{\text{app}} = O(\mu^n)$  et cette écriture est la première étape pour l'obtention de l'estimée souhaitée que l'on admet ici (voir la proposition 3.37. de [7] pour les étapes suivantes).

On se contente pour ce travail du calcul des deux premiers termes du développement asymptotique de  $\bar{V}$

qui peuvent être déterminés à partir des expressions  $\phi_0 = \psi$  et  $\phi_1 = -h^2 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \partial_x^2 \psi$ .

Pour le premier, on a :

$$\bar{V}_0 = \int_{-1}^0 \partial_x \psi - \frac{1}{h} (z \partial_x h + \varepsilon \partial_x \zeta) \partial_z \psi dz \text{ avec } \psi \text{ ne dépendant pas de } z \text{ donc}$$

$$\bar{V}_0 = \int_{-1}^0 \partial_x \psi dz = \partial_x \psi.$$

Pour le deuxième terme, l'expression de  $\phi_1$  permet d'obtenir

$$\bar{V}_1 = \int_{-1}^0 \partial_x \left( -h^2 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \partial_x^2 \psi \right) - \frac{1}{h} (z \partial_x h + \varepsilon \partial_x \zeta) \partial_z \left( -h^2 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) \partial_x^2 \psi \right) dz$$

$$\bar{V}_1 = \int_{-1}^0 (-2h\varepsilon \partial_x \zeta \partial_x^2 \psi - h^2 \partial_x^3 \psi) \left( \frac{z^2}{2} + z \right) + \frac{h^2}{h} (z+1) \varepsilon \partial_x \zeta (z+1) \partial_x^2 \psi dz$$

$$\bar{V}_1 = (-2h\varepsilon \partial_x \zeta \partial_x^2 \psi - h^2 \partial_x^3 \psi) \int_{-1}^0 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) dz + \frac{h^2}{h} \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x^2 \psi \int_{-1}^0 (z+1)^2 dz.$$

Il reste à calculer les intégrales (réelles)  $\int_{-1}^0 \left( \frac{z^2}{2} + z \right) dz = \left[ \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{-1}{3}$  et

$$\int_{-1}^0 (z+1)^2 dz = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}.$$

Ainsi,  $\bar{V}_1 = \frac{2}{3} h \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x^2 \psi + \frac{1}{3} h^2 \partial_x^3 \psi + \frac{1}{3} h \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x^2 \psi = h \varepsilon \partial_x \zeta \partial_x^2 \psi + \frac{h^2}{3} \partial_x (\partial_x^2 \psi) = \frac{1}{3h} \partial_x (h^3 \partial_x^2 \psi)$  (il suffit de

calculer la dérivée apparaissant dans ce dernier terme pour le voir).

On a donc obtenu les expressions explicites souhaitées de  $\bar{V}_0$  et  $\bar{V}_1$ .  $\square$

Avec ce développement asymptotique de  $\bar{V}$ , il est possible d'en déduire directement les premiers termes de celui de l'opérateur  $\mathcal{G}\psi$  apparaissant dans les équations des vagues puisque  $\mathcal{G}\psi = -\mu\partial_x(h\bar{V})$  d'après la proposition II.2. Ainsi,  $\mathcal{G}\psi = -\mu\partial_x(h\bar{V}_0) - \mu^2\partial_x(h\bar{V}_1) + O(\mu^3) = -\mu\partial_x(h\partial_x\psi) + \mu^2\partial_x(h\mathcal{T}[h]\partial_x\psi) + O(\mu^3)$  avec les notations précédentes.

## II.2 Dérivation à faible profondeur : vers un premier modèle asymptotique

Maintenant qu'on a obtenu les premiers termes du développement asymptotique de  $\mathcal{G}\psi$  lorsque  $\mu \rightarrow 0$ , on va pouvoir déterminer un premier modèle asymptotique des équations des vagues à faible profondeur et avec l'hypothèse supplémentaire  $\varepsilon = O(\mu)$  dite d'ondes longues. Cette détermination de ce modèle est couramment appelée dérivation du système original. Pour réaliser cette dérivation, on repart du système (adimensionné) :

$$\begin{cases} \partial_t\zeta - \frac{1}{\mu}\mathcal{G}\psi = 0, \\ \partial_t\psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2}(\partial_x\psi)^2 - \varepsilon\mu\frac{(\frac{1}{\mu}\mathcal{G}\psi + \partial_x(\varepsilon\zeta)\partial_x\psi)^2}{2(1 + \varepsilon^2\mu(\partial_x\zeta)^2)} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

et on suppose que  $\zeta$  et  $\psi$  sont suffisamment régulières.

Partons de la première équation de (4) :  $\partial_t\zeta - \frac{1}{\mu}\mathcal{G}\psi = 0$  donc, d'après la proposition II.2,  $\partial_t\zeta + \partial_x(h\bar{V}) = 0$ .

Avant de regarder la deuxième équation, remarquons que  $\bar{V} = \partial_x\psi + \frac{\mu}{3}\partial_x^3\psi + O(\mu^2)$ .

En effet, d'après la proposition II.4, on a  $\bar{V} = \partial_x\psi + \frac{\mu}{3h}\partial_x(h^3\partial_x^2\psi)$  avec  $\partial_x(h^3\partial_x^2\psi) = 3h^2\varepsilon\partial_x\zeta\partial_x^2\psi + h^3\partial_x^3\psi$ .

Or, on suppose que  $\varepsilon = O(\mu)$  donc  $h := 1 + \varepsilon\zeta = 1 + O(\mu)$  et  $\partial_x(h^3\partial_x^2\psi) = \partial_x^3\psi + O(\mu)$ , ce qui donne bien

$$\bar{V} = \partial_x\psi + \frac{\mu}{3}\partial_x^3\psi + O(\mu^2).$$

On dérive maintenant la deuxième équation de (4) par rapport à  $x$ , ce qui donne (avec le lemme de Schwarz, valide puisque les fonctions sont supposées assez régulières) :

$$\partial_t\partial_x\psi + \partial_x\zeta + \frac{\varepsilon}{2}\partial_x((\partial_x\psi)^2) - \partial_x\left(\varepsilon\mu\frac{(\frac{1}{\mu}\mathcal{G}\psi + \partial_x(\varepsilon\zeta)\partial_x\psi)^2}{2(1 + \varepsilon^2\mu(\partial_x\zeta)^2)}\right) = 0.$$

On injecte alors l'expression précédemment établie  $\partial_x\psi = \bar{V} + \frac{\mu}{3}\partial_x^3\psi + O(\mu^2)$  pour obtenir :

$$\partial_t\bar{V} - \frac{\mu}{3}\partial_x^3\partial_t\psi + \partial_x\zeta + \varepsilon\partial_x\psi\partial_x^2\psi + O(\mu^2) = 0$$

$$\partial_t\bar{V} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2\partial_t\bar{V} + \partial_x\zeta + \varepsilon(\bar{V}\partial_x\bar{V}) + O(\mu^2) = 0$$

$$(\text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2)\partial_t\bar{V} + \partial_x\zeta + \varepsilon\bar{V}\partial_x\bar{V} = O(\mu^2).$$

Ainsi, le système de Boussinesq classique ("classical Boussinesq") :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x(h\bar{V}) = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2)\partial_t \bar{V} + \partial_x \zeta + \varepsilon \bar{V} \partial_x \bar{V} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

approxime les équations des vagues (4) à l'ordre 2 en  $\mu$ .

Plus précisément, on dit que les équations des vagues sont consistantes d'ordre  $O(\mu^2)$  avec ce système (7) :

si  $(\zeta, \psi)$  est solution de (4) sur  $[0, T]$  alors  $(\zeta, \bar{V})$  vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x(h\bar{V}) = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2)\partial_t \bar{V} + \partial_x \zeta + \varepsilon \bar{V} \partial_x \bar{V} = \mu^2 R. \end{cases}$$

où  $R$  est une fonction régulière bornée.

Une introduction historique de ce système (7) de Boussinesq est présentée dans [1].

On a ainsi établi un premier modèle asymptotique (7) des équations des vagues.

### II.3 Ajout de paramètres

Dans cette sous-partie, on va construire d'autres modèles asymptotiques des équations des vagues (4) en ajoutant des paramètres jusqu'à obtenir un système dit de Boussinesq-abcd (à 4 paramètres). De nouveau, on suppose que  $\varepsilon = O(\mu)$  et que les fonctions considérées ( $\zeta$  et  $\bar{V}$ ) sont suffisamment régulières.

On commence par considérer un seul paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  auquel on associe le système :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x(h\bar{V}) = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu\alpha}{3}\partial_x^2)(\partial_t \bar{V} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial_x \zeta) + \frac{1}{\alpha}\partial_x \zeta + \varepsilon \bar{V} \partial_x \bar{V} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Montrons que les équations des vagues sont consistantes d'ordre  $O(\mu^2)$  avec ce système (8).

La première équation s'obtient exactement comme on a fait pour obtenir (7) (aussi en  $O(\mu^2)$ ). De plus, il

existe un reste  $R$  borné tel que  $(\text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2)\partial_t \bar{V} + \partial_x \zeta + \varepsilon \bar{V} \partial_x \bar{V} = \mu^2 R$  d'après ce même système obtenu dans la sous-partie précédente. On peut alors écrire  $\partial_t \bar{V} = -\partial_x \zeta + \mu \tilde{R}$  où  $\tilde{R} := \frac{-\varepsilon}{\mu} \bar{V} \partial_x \bar{V} + \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \partial_t \bar{V} + \mu R$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , montrons que  $(\text{id} - \frac{\mu\alpha}{3}\partial_x^2)(\partial_t \bar{V} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial_x \zeta) + \frac{1}{\alpha}\partial_x \zeta + \varepsilon \bar{V} \partial_x \bar{V} = O(\mu^2)$  sachant que, d'après (7),  $\partial_t \bar{V} + \partial_x \zeta + \varepsilon \bar{V} \partial_x \bar{V} = \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \partial_t \bar{V} + O(\mu^2)$ .

Pour cela, il suffit d'observer que  $\frac{-\mu}{3} \partial_x^2 \partial_t \bar{V} = \frac{-\mu\alpha}{3} \partial_x^2 \partial_t \bar{V} + \frac{\alpha-1}{3} \mu \partial_x^2 \partial_t \bar{V}$  avec  $\partial_t \bar{V} = -\partial_x \zeta + O(\mu)$  donc  $\frac{-\mu}{3} \partial_x^2 \partial_t \bar{V} = \frac{-\mu\alpha}{3} \partial_x^2 \partial_t \bar{V} - \frac{\mu\alpha}{3} \partial_x^2 \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \partial_t \bar{V} \right)$ .

Ainsi, on a obtenu la deuxième équation de (8), ce qui donne un modèle asymptotique à un paramètre des

équations des vagues.

Maintenant, on va rajouter d'autres paramètres. Pour cela, on va changer l'inconnue donnant la vitesse : on considère deux paramètres  $(\theta, \delta) \in \mathbb{R}_+^2$  ainsi que la nouvelle variable  $V_{\theta, \delta} := \left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)^{-1} \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\bar{V}$  où on suppose que  $\mu$  est suffisamment petit pour que cette variable soit bien définie. En partant du système (8) que l'on vient d'établir, on va montrer que  $V_{\theta, \delta}$  est solution (toujours à un terme en  $O(\mu^2)$  près) du système suivant à 3 paramètres :

$$\begin{cases} \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\partial_t\zeta + \partial_x\left(h\left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)V_{\theta, \delta}\right) - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x\left(\partial_x^2(hV_{\theta, \delta}) - h\partial_x^2V_{\theta, \delta}\right) = 0, \\ \left(\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2\right)\left(\partial_tV_{\theta, \delta} + \frac{\alpha + \delta - 1}{\alpha + \theta}\partial_x\zeta\right) + \frac{1 + \theta - \delta}{\alpha + \theta}\partial_x\zeta + \varepsilon V_{\theta, \delta}\partial_xV_{\theta, \delta} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Plus précisément, montrons que les équations des vagues sont consistantes d'ordre  $O(\mu^2)$  avec (9).

Commençons par établir la deuxième équation. Par définition de  $V_{\theta, \delta}$ , on a :

$$\begin{aligned} \left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)V_{\theta, \delta} &= \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\bar{V} \text{ donc, d'après le lemme de Schwarz,} \\ \left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)\partial_tV_{\theta, \delta} &= \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\partial_t\bar{V}. \end{aligned}$$

On applique maintenant  $\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)$  à la deuxième équation de (8) :

$$\begin{aligned} &\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\left(\text{id} - \frac{\mu\alpha}{3}\partial_x^2\right)\left(\partial_t\bar{V} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\partial_x\zeta\right) + \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\frac{1}{\alpha}\partial_x\zeta + \varepsilon\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\left(\bar{V}\partial_x\bar{V}\right) = 0 \\ &\left(\text{id} - \frac{\mu\alpha}{3}\partial_x^2\right)\left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)\partial_tV_{\theta, \delta} + \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\partial_x\zeta + \frac{\mu(1 - \alpha)}{3}\partial_x^3\zeta + \frac{1}{\alpha}\partial_x\zeta\right) + \varepsilon\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\left(\bar{V}\partial_x\bar{V}\right) = 0 \\ &\left(\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2\right)\partial_tV_{\theta, \delta} + O(\mu^2) + \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\left(\text{id} - \frac{\mu(\alpha - 1)}{3}\partial_x^2\right)\partial_x\zeta + \varepsilon\bar{V}\partial_x\bar{V} + O(\mu^2) = 0 \text{ car } \varepsilon = O(\mu) \\ &\left(\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2\right)\partial_tV_{\theta, \delta} + \left(\text{id} - \frac{\mu(\delta + \alpha - 1)}{3}\partial_x^2\right)\partial_x\zeta + O(\mu^2) + \varepsilon\bar{V}\partial_x\bar{V} = O(\mu^2) \text{ donc} \\ &\left(\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2\right)\left(\partial_tV_{\theta, \delta} + \frac{\delta + \alpha - 1}{\alpha + \theta}\partial_x\zeta\right) + \frac{1 + \theta - \delta}{\alpha + \theta}\partial_x\zeta + \varepsilon\bar{V}\partial_x\bar{V} = O(\mu^2). \end{aligned}$$

Or,  $\bar{V}\partial_x\bar{V} = (V_{\theta, \delta} + O(\mu))\partial_x(V_{\theta, \delta} + O(\mu)) = V_{\theta, \delta}\partial_xV_{\theta, \delta} + O(\mu)$  et  $\varepsilon = O(\mu)$  par hypothèse, ce qui donne :

$$\left(\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2\right)\left(\partial_tV_{\theta, \delta} + \frac{\alpha + \delta - 1}{\alpha + \theta}\partial_x\zeta\right) + \frac{1 + \theta - \delta}{\alpha + \theta}\partial_x\zeta + \varepsilon V_{\theta, \delta}\partial_xV_{\theta, \delta} = O(\mu^2).$$

Passons à l'obtention de la première équation.

On part de  $\partial_t\zeta + \partial_x(h\bar{V}) = 0$  et on applique  $\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)$  pour obtenir :

$$\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\partial_t\zeta + \left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\partial_x(h\bar{V}) = 0.$$

Afin d'avoir la première équation de (9), il suffit donc de montrer que :

$$\left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)\partial_x(h\bar{V}) = \partial_x\left(h\left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)V_{\theta, \delta}\right) - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x\left(\partial_x^2(hV_{\theta, \delta}) - h\partial_x^2V_{\theta, \delta}\right) + O(\mu^2).$$

Le membre de gauche vaut  $\left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)\partial_x(h\bar{V}) = \partial_x(h\bar{V}) - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^3(h\bar{V})$  et celui de droite est égal à :

$$\begin{aligned} \partial_x\left(h\left(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2\right)V_{\theta, \delta}\right) - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x\left(\partial_x^2(hV_{\theta, \delta}) - h\partial_x^2V_{\theta, \delta}\right) &= \partial_x\left(h\left(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2\right)\bar{V}\right) - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x\left(\partial_x^2(h\bar{V}) - h\partial_x^2\bar{V}\right) + O(\mu^2) \\ \text{puisque } V_{\theta, \delta} &= \bar{V} + O(\mu) \text{ par définition de } V_{\theta, \delta}. \text{ En développant puis en factorisant par } \frac{\mu\delta}{3}, \text{ on se ramène} \end{aligned}$$

à montrer que  $\partial_x^3(h\bar{V}) = \partial_x(h\partial_x^2\bar{V}) + \partial_x(\partial_x^2(h\bar{V}) - h\partial_x^2\bar{V})$ , ce qui s'obtient facilement en écrivant que  $\partial_x^2(h\bar{V}) = h\partial_x^2\bar{V} + \partial_x^2(h\bar{V}) - h\partial_x^2\bar{V}$ .

Ainsi, on a bien  $(\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2)\partial_t\zeta + \partial_x(h(\text{id} - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^2)V_{\theta,\delta}) - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x(\partial_x^2(hV_{\theta,\delta}) - h\partial_x^2V_{\theta,\delta}) = O(\mu^2)$ , le troisième terme de cette équation étant un terme compensatoire du deuxième.

On peut encore aller plus loin dans la construction d'un modèle asymptotique des équations des vagues en ajoutant un quatrième paramètre. Avant cela, on peut s'apercevoir que le système (9) peut encore être simplifié car des termes sont encore en  $O(\mu^2)$  : c'est le cas du terme compensatoire précédent car on a  $\partial_x^2(hV_{\theta,\delta}) - h\partial_x^2V_{\theta,\delta} = \partial_x^2hV_{\theta,\delta} + 2\partial_x h\partial_x V_{\theta,\delta} + \cancel{h\partial_x^2V_{\theta,\delta}} - \cancel{h\partial_x^2V_{\theta,\delta}}$  d'après la formule de Leibniz.

Par conséquent,  $\partial_x^2(hV_{\theta,\delta}) - h\partial_x^2V_{\theta,\delta} = \partial_x^2hV_{\theta,\delta} + 2\partial_x h\partial_x V_{\theta,\delta}$ .

Par définition de  $h := 1 + \varepsilon\zeta$ , on a  $\partial_x h = \varepsilon\partial_x\zeta = O(\mu)$  donc  $\frac{-\mu\delta}{3}\partial_x(\partial_x^2(hV_{\theta,\delta}) - h\partial_x^2V_{\theta,\delta}) = O(\mu^2)$ .

En développant ensuite la deuxième équation de (9), on obtient l'approximation suivante (toujours en  $O(\mu^2)$ ) :

$$\begin{cases} (\text{id} - \frac{\mu\delta}{3}\partial_x^2)\partial_t\zeta + \partial_x(hV_{\theta,\delta}) - \frac{\mu\theta}{3}\partial_x^3V_{\theta,\delta} = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2)\partial_tV_{\theta,\delta} + \partial_x\zeta - \frac{\mu(\alpha + \delta - 1)}{3}\partial_x^3\zeta + \varepsilon V_{\theta,\delta}\partial_x V_{\theta,\delta} = 0. \end{cases}$$

On introduit alors un quatrième paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  en ajoutant  $\frac{-\mu\lambda}{3}(\partial_x^2\partial_t\zeta - \partial_x^3V_{\theta,\delta})$  à la première équation :

$$(\text{id} - \frac{\mu(\delta + \lambda)}{3}\partial_x^2)\partial_t\zeta + \partial_x(hV_{\theta,\delta}) - \frac{\mu(\theta + \lambda)}{3}\partial_x^3V_{\theta,\delta} = O(\mu^2).$$

En effet, d'après (7),  $\partial_t\zeta = -\partial_x(h\bar{V}) + O(\mu^2) = -\partial_x\bar{V} + O(\mu)$  donc  $\partial_x^2\partial_t\zeta - \partial_x^3V_{\theta,\delta} = O(\mu)$  par différence,

donc le terme ajouté est en fait négligeable à l'ordre 2 :  $\frac{-\mu\lambda}{3}(\partial_x^2\partial_t\zeta - \partial_x^3V_{\theta,\delta}) = O(\mu^2)$ .

Cela donne ainsi le système :

$$\begin{cases} (\text{id} - \frac{\mu(\delta + \lambda)}{3}\partial_x^2)\partial_t\zeta + \partial_x(hV_{\theta,\delta}) - \frac{\mu(\theta + \lambda)}{3}\partial_x^3V_{\theta,\delta} = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu(\alpha + \theta)}{3}\partial_x^2)\partial_tV_{\theta,\delta} + \partial_x\zeta - \frac{\mu(\alpha + \delta - 1)}{3}\partial_x^3\zeta + \varepsilon V_{\theta,\delta}\partial_x V_{\theta,\delta} = 0. \end{cases}$$

pour lequel les équations des vagues (4) sont consistantes d'ordre  $O(\mu^2)$ .

Pour simplifier l'écriture de ce système, on peut renommer les paramètres introduits en :

$$\tilde{a} := -\frac{\theta + \lambda}{3}, \tilde{b} := \frac{\lambda + \delta}{3}, \tilde{c} := \frac{1 - \alpha - \delta}{3} \text{ et } \tilde{d} := \frac{\alpha + \theta}{3}.$$

On peut remarquer que ces paramètres vérifient la contrainte  $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} + \tilde{d} = \frac{1}{3}$ .

Avec ces notations, on obtient alors le système de Boussinesq-abcd :

$$\begin{cases} (\text{id} - \mu \tilde{b} \partial_x^2) \partial_t \zeta + \partial_x (h V_{\theta, \delta}) + \mu \tilde{a} \partial_x^3 V_{\theta, \delta} = 0, \\ (\text{id} - \mu \tilde{d} \partial_x^2) \partial_t V_{\theta, \delta} + \partial_x \zeta + \mu \tilde{c} \partial_x^3 \zeta + \varepsilon V_{\theta, \delta} \partial_x V_{\theta, \delta} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

On a ainsi construit un modèle asymptotique (10) à quatre paramètres pour lequel les équations des vagues sont consistantes à d'ordre  $O(\mu^2)$ .

### III Caractère bien posé du système de Boussinesq

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'au système (7) de Boussinesq classique qui approxime les équations des vagues à l'ordre 2 en  $\mu$  comme on l'a vu dans la deuxième partie. On cherche ici à étudier ce système hyperbolique quasi-linéaire de manière théorique en justifiant l'existence d'une unique solution locale, comme l'a fait Israwi dans [5] pour les équations de Green-Naghdi, ressemblant à celles qu'on considère ici. Une approche différente des équations de Boussinesq est proposée dans [2].

#### III.1 Changement de variables et résultats préliminaires

Rappelons le système de Boussinesq considéré ici. Pour alléger les notations, on notera dorénavant  $u$  au lieu de  $\bar{V}$  la vitesse moyenne horizontale.

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \varepsilon \partial_x \zeta u + h \partial_x u = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2) \partial_t u + \partial_x \zeta + \varepsilon u \partial_x u = 0. \end{cases} \quad (7)$$

On commence par effectuer un changement de variable préalable afin de rendre ce système symétrique :

##### **Proposition III.1**

*On suppose qu'il existe  $(\zeta, u)$  avec  $1 + \varepsilon \zeta \geq h_0 > 0$  solution régulière du système de Boussinesq (7).  
Pour  $\tilde{\zeta} := \frac{2}{\varepsilon}(\sqrt{1 + \varepsilon \zeta} - 1)$ ,  $\tilde{u} := u$  et  $\tilde{h} := 1 + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{U} := \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$  vérifie  $S \partial_t \tilde{U} + A(\tilde{U}) \partial_x \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  où  
 $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \end{pmatrix}$  et  $A(\tilde{U}) := \begin{pmatrix} \varepsilon \tilde{u} & \tilde{h} \\ \tilde{h} & \varepsilon \tilde{u} \end{pmatrix}$  (qui est une matrice symétrique).*

**Démonstration :** Déjà, ce changement de variable est bien défini puisque  $h := 1 + \varepsilon \zeta \geq h_0 > 0$  par hypothèse. Ensuite, en notant  $\partial$  pour indiquer une dérivée partielle (en  $x$  ou  $t$ ), on a formellement

$$\partial \tilde{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\sqrt{1 + \varepsilon \zeta}} \text{ donc } \partial \zeta = \sqrt{h} \partial \tilde{\zeta}.$$

$$\text{Or, } \tilde{\zeta} := \frac{2}{\varepsilon}(\sqrt{1 + \varepsilon \zeta} - 1) \text{ donc } \zeta = \frac{(1 + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\zeta})^2 - 1}{\varepsilon} = \frac{\tilde{h}^2 - 1}{\varepsilon} \text{ et } \partial \zeta = \frac{2 \tilde{h} \partial \tilde{h}}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} \tilde{h} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{\zeta}} \partial \tilde{\zeta} = \tilde{h} \partial \tilde{\zeta}.$$

En injectant cette expression dans (7), on obtient le système :

$$\begin{cases} \tilde{h}\partial_t\tilde{\zeta} + \varepsilon\tilde{h}\partial_x\tilde{\zeta}\tilde{u} + \tilde{h}^2\partial_x\tilde{u} = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2)\partial_t\tilde{u} + \tilde{h}\partial_x\tilde{\zeta} + \varepsilon\tilde{u}\partial_x\tilde{u} = 0. \end{cases}$$

En divisant par  $\tilde{h}$  (qui est non nul pour  $\varepsilon$  assez petit) dans la première équation, on peut alors mettre le système obtenu sous la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t\tilde{\zeta} \\ \partial_t\tilde{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon\tilde{u} & \tilde{h} \\ \tilde{h} & \varepsilon\tilde{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x\tilde{\zeta} \\ \partial_x\tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où le résultat.  $\square$

Pour pouvoir considérer ce système obtenu après changement de variables, il faut vérifier que pour  $s \in \mathbb{N}^*$  fixé, on a les propriétés suivantes :

**Lemme III.2**

Pour  $\tilde{M} > 0$ , si  $\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} + \|\tilde{u}\|_{H^s} \leq \tilde{M}$  alors il existe  $\tilde{C} > 0$  tel que  $\|\zeta\|_{H^s} + \|u\|_{H^s} \leq \tilde{C} \times (\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} + \|\tilde{u}\|_{H^s})$ ,  
 Pour  $M > 0$ , si  $\|\zeta\|_{H^s} + \|u\|_{H^s} \leq M$  alors il existe  $C > 0$  tel que  $\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} + \|\tilde{u}\|_{H^s} \leq C \times (\|\zeta\|_{H^s} + \|u\|_{H^s})$ .

**Démonstration :** Comme  $\tilde{u} := u$ , il suffit de vérifier qu'on a  $\|\zeta\|_{H^s} \leq \tilde{C} \times \|\tilde{\zeta}\|_{H^s}$  et  $\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} \leq C \times \|\zeta\|_{H^s}$ .

Pour obtenir la première inégalité, on remarque en développant que  $\zeta = \frac{(1 + \frac{\varepsilon}{2}\tilde{\zeta})^2 - 1}{\varepsilon} = \tilde{\zeta}(1 + \frac{\varepsilon}{4}\tilde{\zeta})$  donc, d'après l'inégalité pour le produit pour la norme  $H^s$  (valide puisque  $s > \frac{1}{2}$  ici), on a :

$$\|\zeta\|_{H^s} = \|\tilde{\zeta}(1 + \frac{\varepsilon}{4}\tilde{\zeta})\|_{H^s} \leq C\|\tilde{\zeta}\|_{H^s}\|1 + \frac{\varepsilon}{4}\tilde{\zeta}\|_{H^s} \leq C \times (1 + \frac{\varepsilon}{4}\|\tilde{\zeta}\|_{H^s})\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} \leq \tilde{C}\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} \text{ (en renommant la constante, sachant que } \|\tilde{\zeta}\|_{H^s} \leq \tilde{M}\text{)}.$$

La seconde s'obtient de manière plus élémentaire car pour tout  $x \geq -1$ ,  $|\sqrt{1+x} - 1| \leq |x|$  (en effet,  $\sqrt{x+1} \leq x+1$  pour tout  $x \geq 0$ , et on observe que  $\sqrt{x+1} \leq 1-x \Leftrightarrow 1+x \leq (1-x)^2 \Leftrightarrow 3x \leq x^2$ , ce qui est vrai pour  $x \in [-1, 0]$ ) donc  $|\tilde{\zeta}| = \frac{2}{\varepsilon}|\sqrt{1+\varepsilon\tilde{\zeta}} - 1| \leq \frac{2\varepsilon}{\varepsilon}|\tilde{\zeta}|$  puisque  $\varepsilon\tilde{\zeta} > -1$  par hypothèse. Ainsi, on a directement l'inégalité  $\|\tilde{\zeta}\|_{H^s} \leq 2\|\zeta\|_{H^s}$ .  $\square$

Dans la suite, on va montrer que ce système admet une unique solution et on reviendra au système initial en fin de partie. Jusqu'à ce moment-là, on omettra les tildes et on raisonnera directement à partir de  $S\partial_t U + A(U)\partial_x U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour obtenir l'existence locale d'une solution à ce système avec une donnée initiale  $U_0$  choisie suffisamment régulière, on va commencer par chercher à déterminer un espace fonctionnel adapté.

Pour en avoir l'intuition, on regarde le linéarisé du système autour de  $(0, 0)$  :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x u = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3}\partial_x^2)\partial_t u + \partial_x \zeta = 0. \end{cases}$$

On multiplie la première équation par  $\zeta$  et la seconde par  $u$  :

$$\begin{cases} \zeta \partial_t \zeta + \zeta \partial_x u = 0, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2) \partial_t u u + u \partial_x \zeta = 0. \end{cases}$$

puis on intègre chaque équation sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}} \zeta^2 \right) + \int_{\mathbb{R}} \zeta \partial_x u = 0, \\ \frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}} u^2 \right) - \frac{\mu}{3} \int_{\mathbb{R}} u \partial_x^2 \partial_t u + \int_{\mathbb{R}} u \partial_x \zeta = 0. \end{cases}$$

Or, par intégration par partie (dans l'espace de Sobolev  $H^0 = L^2$ ), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} u \partial_x \zeta = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x u \zeta.$$

En sommant les deux équations obtenues, on obtient donc :

$$\frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}} \zeta^2 \right) + \frac{1}{2} \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}} u^2 \right) - \frac{\mu}{3} \int_{\mathbb{R}} u \partial_x^2 \partial_t u = 0.$$

Enfin, en intégrant également par parties dans le dernier terme, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\zeta\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{3} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \right) = 0.$$

Pour avoir un résultat similaire avec les dérivées d'ordres supérieurs, on peut par exemple dériver les deux équations du système linéarisé par rapport à  $x$  puis les multiplier respectivement par  $\partial_x \zeta$  et  $\partial_x u$  avant

d'intégrer. Pour les dérivées d'ordre 1, cela donne  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\partial_x \zeta\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{3} \|\partial_x^2 u\|_{L^2}^2 \right) = 0$ .

En itérant, on obtient :  $\frac{d}{dt} \left( \|\zeta\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}^2 + \frac{\mu}{3} \|\partial_x u\|_{H^s}^2 \right) = 0$  pour tout  $s \in \mathbb{N}$ .

Même s'il n'y a a priori aucune raison que cette quantité reste conservée pour le système non linéarisé, cette analyse donne l'intuition de la norme à considérer pour obtenir ensuite des inégalités d'énergie cruciales pour la justification de l'existence locale. En particulier, on observe que  $u$  doit avoir un ordre de régularité supérieur à celui de  $\zeta$ . On considère donc dans la suite l'espace fonctionnel suivant :

### Définition III.3

Soit  $s \in \mathbb{N}$ .

On définit l'espace fonctionnel  $Y^s := \left\{ U = (\zeta, u) \in H^s \times H^{s+1}, \|\zeta\|_{H^s} + \|u\|_{H^s} + \frac{\mu}{3} \|\partial_x u\|_{H^s} < +\infty \right\}$

et on le munit de la norme  $\|U\|_{Y^s}^2 = \|(\zeta, u)\|_{Y^s}^2 := \|\zeta\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}^2 + \frac{\mu}{3} \|\partial_x u\|_{H^s}^2$ .

Cet espace  $(Y^s, \|\cdot\|_{Y^s})$  est un espace de Hilbert (car  $(H^s, \|\cdot\|_{H^s})$  l'est).

Plus généralement, par sa définition, la norme  $\|\cdot\|_{Y^s}$  a un comportement similaire à celui de la norme  $\|\cdot\|_{H^s}$ .

On termine ces résultats préliminaires par un dernier qui donne une autre expression de cette norme  $\|\cdot\|_{Y^s}$  grâce à la forme particulière de l'opérateur matriciel  $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \end{pmatrix}$  :

**Lemme III.4**

Soient  $s \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{E}^s(U)^2 := \langle \Lambda^s U \mid S \Lambda^s U \rangle$  défini pour tout  $U \in Y^s$ .

Pour  $U \in Y^s$ , on a l'identité  $\mathcal{E}^s(U) = \|U\|_{Y^s}$ .

**Démonstration :** L'établissement de cette identité permet de justifier la bonne définition de  $\mathcal{E}^s(U)$  puisque  $\|U\|_{Y^s}$  est bien définie pour tout  $U = (\zeta, u) \in Y^s$ . À partir de la définition de  $S$ , calculons alors  $\mathcal{E}^s(U)^2 = \langle \Lambda^s \zeta \mid 1 \times \Lambda^s \zeta \rangle + \left\langle \Lambda^s u \mid \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \Lambda^s u \right\rangle = \|\Lambda^s \zeta\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^s u\|_{L^2}^2 - \frac{\mu}{3} \langle \Lambda^s u \mid \partial_x^2 (\Lambda^s u) \rangle$  donc, par une intégration par parties, par définition de la norme  $\|\cdot\|_{H^s}$  et en utilisant le fait que  $\partial_x$  et  $\Lambda^s$  commutent, on obtient  $\mathcal{E}^s(U)^2 = \|\zeta\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}^2 + \frac{\mu}{3} \|\partial_x u\|_{H^s}^2$ , d'où  $\mathcal{E}^s(U)^2 = \|U\|_{Y^s}^2$ .  $\square$

### III.2 Cas linéaire et inégalités d'énergie

Avec ces résultats préliminaires, nous pouvons maintenant passer à l'obtention d'une inégalité d'énergie et à l'existence d'une solution dans une version linéaire du problème obtenu à partir de (7) après changement de variable.

Pour obtenir cette version linéaire, on ne considère plus les termes d'ordres de dérivées inférieurs comme des inconnus mais comme des données fixées (cela rend bien le problème linéaire ici). Cette résolution particulière sera ensuite utile pour obtenir l'existence locale d'une solution au problème non linéarisé, comme on le verra dans la sous-partie suivante.

**Théorème III.5**

Soient  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ ,  $T > 0$  et  $Y_T^s := \mathcal{C}^0([0, T]; Y^s)$ .

Si  $\underline{U} = (\underline{\zeta}, \underline{u}) \in Y_T^s$  est tel que  $\partial_t \underline{U} \in Y_T^{s-1}$  alors il existe une unique solution  $U \in Y_T^s$  au problème

$$\begin{cases} S \partial_t U + A(U) \partial_x U = 0, \\ U|_{t=0} = U_0. \end{cases} \tag{11}$$

De plus, il existe  $\lambda_T > 0$  tel que  $U$  vérifie l'inégalité d'énergie :  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{E}^s(U(t)) \leq e^{\frac{\varepsilon \lambda_T t}{2}} \mathcal{E}^s(U_0)$ .

**Démonstration :** On admet pour le moment l'existence et l'unicité de la solution  $U$  : on justifie d'abord l'inégalité d'énergie. Pour l'obtenir, on procède comme dans [5] en calculant, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\varepsilon \lambda t} \partial_t (e^{-\varepsilon \lambda t} \mathcal{E}^s(U)^2) = -\varepsilon \lambda \mathcal{E}^s(U)^2 + \partial_t (\mathcal{E}^s(U)^2)$ , avec :

$\partial_t(\mathcal{E}^s(U)^2) = \langle \partial_t(\Lambda^s U) | S\Lambda^s U \rangle + \langle \Lambda^s U | \partial_t(S\Lambda^s U) \rangle = 2 \langle \Lambda^s \zeta | \Lambda^s \partial_t \zeta \rangle + 2 \left\langle \Lambda^s u \left| \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \Lambda^s \partial_t u \right. \right\rangle$  (en supposant que  $\partial_t$  et  $(\text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2)$  commutent, ce qui est le cas lorsque ceux-ci sont appliqués à des fonctions régulières comme la solution considérée ici).

Ainsi,  $\frac{1}{2} e^{\varepsilon \lambda t} \partial_t (e^{-\varepsilon \lambda t} \mathcal{E}^s(U)^2) = \frac{-\varepsilon \lambda}{2} \mathcal{E}^s(U)^2 + \langle \Lambda^s \zeta | \Lambda^s \partial_t \zeta \rangle + \left\langle \Lambda^s u \left| \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \Lambda^s \partial_t u \right. \right\rangle$ , ce qui s'écrit aussi  $\frac{1}{2} e^{\varepsilon \lambda t} \partial_t (e^{-\varepsilon \lambda t} \mathcal{E}^s(U)^2) = \frac{-\varepsilon \lambda}{2} \mathcal{E}^s(U)^2 + \langle \Lambda^s U | \Lambda^s S \partial_t U \rangle = \frac{-\varepsilon \lambda}{2} \mathcal{E}^s(U)^2 - \langle \Lambda^s U | \Lambda^s A(\underline{U}) \partial_x U \rangle$  d'après l'équation vérifiée par  $U$ .

On va maintenant chercher à majorer le dernier terme après avoir remarqué que  $\Lambda^s A(\underline{U}) \partial_x U = A(\underline{U}) \Lambda^s \partial_x U$  :

on écrit  $\langle \Lambda^s U | \Lambda^s A(\underline{U}) \partial_x U \rangle = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  où, pour  $\underline{h} := 1 + \varepsilon \zeta$ ,

$$A_1 := \varepsilon \langle \Lambda^s \zeta | \Lambda^s (\underline{u} \partial_x \zeta) \rangle, A_2 := \langle \Lambda^s \zeta | \underline{h} \Lambda^s \partial_x u \rangle, A_3 := \langle \Lambda^s u | \underline{h} \Lambda^s \partial_x \zeta \rangle \text{ et } A_4 := \varepsilon \langle \Lambda^s u | \underline{u} \Lambda^s \partial_x u \rangle.$$

On va estimer chacun de ces termes à partir d'estimées produits.

Commençons par exprimer  $A_1$  en utilisant la formule de Leibniz :

$$\langle \Lambda^s \zeta | \Lambda^s (\underline{u} \partial_x \zeta) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^s \zeta \underline{u} \partial_x^{s+1} \zeta + \sum_{k=1}^s \binom{s}{k} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^s \zeta \partial_x^k \underline{u} \partial_x^{s+1-k} \zeta.$$

La proposition A.5. prise avec  $s = 0$  dans l'annexe de [4] permet alors d'obtenir :

$$|\langle \Lambda^s \zeta | \Lambda^s (\underline{u} \partial_x \zeta) \rangle| \leq C(\|\underline{u}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U)^2, \text{ d'où } |A_1| \leq \varepsilon C(\|\underline{u}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U)^2.$$

Pour  $A_2$  et  $A_3$ , on calcule directement leur somme :

$$A_2 + A_3 = \langle \Lambda^s \zeta | \underline{h} \Lambda^s \partial_x u \rangle + \langle \Lambda^s u | \underline{h} \Lambda^s \partial_x \zeta \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underline{h} (\Lambda^s \zeta \partial_x (\Lambda^s u) + \Lambda^s u \partial_x (\Lambda^s \zeta)) = \int_{\mathbb{R}} \underline{h} \partial_x (\Lambda^s \zeta \Lambda^s u) \text{ donc}$$

$$A_2 + A_3 = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \underline{h} \Lambda^s \zeta \Lambda^s u = - \langle \partial_x \underline{h} \Lambda^s u | \Lambda^s \zeta \rangle \text{ par une intégration par parties.}$$

Par conséquent, en raisonnant comme pour  $A_1$ , on obtient une estimée de la forme :

$$|A_2 + A_3| \leq \varepsilon C(\|\underline{h}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U)^2.$$

Enfin, pour estimer  $A_4$ , on a similairement :

$$|A_4| = |\varepsilon \langle \Lambda^s u | \underline{u} \Lambda^s \partial_x u \rangle| \leq \varepsilon C(\|\underline{u}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U)^2.$$

Finalement, en sommant ces majorations, on obtient :

$$\langle \Lambda^s U | \Lambda^s A(\underline{U}) \partial_x U \rangle \leq \varepsilon C(\|\underline{u}\|_{H^s}, \|\underline{h}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U)^2 \text{ donc}$$

$$e^{\varepsilon \lambda t} \partial_t (e^{-\varepsilon \lambda t} \mathcal{E}^s(U)^2) \leq -\varepsilon \lambda \mathcal{E}^s(U)^2 + \varepsilon C(\|\underline{u}\|_{H^s}, \|\underline{h}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U)^2. \text{ En factorisant, cela donne :}$$

$$e^{\varepsilon \lambda t} \partial_t (e^{-\varepsilon \lambda t} \mathcal{E}^s(U)^2) \leq \varepsilon (C(\|\underline{u}\|_{H^s}, \|\underline{h}\|_{H^s}) - \lambda) \mathcal{E}^s(U)^2.$$

Pour  $\lambda = \lambda_T > 0$  assez grand (qui dépend de  $T$ ), le membre de droite est négatif donc

$$\partial_t (e^{-\varepsilon \lambda_T t} \mathcal{E}^s(U)^2) \leq 0.$$

Enfin, en intégrant à partir de 0, on obtient  $\mathcal{E}^s(U(t))^2 \leq e^{\varepsilon \lambda t} \mathcal{E}^s(U_0)^2$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Ainsi, on a l'inégalité d'énergie voulue :  $\mathcal{E}^s(U(t)) \leq e^{\frac{\varepsilon \lambda_T t}{2}} \mathcal{E}^s(U_0)$ .

Passons maintenant à la justification de l'existence d'une solution dans ce cadre linéaire. Il est possible pour cela de se ramener à une équation différentielle comme c'est fait dans [3] mais cela nécessite au préalable d'avoir mis le système sous forme résolue, donc d'inverser l'opérateur matriciel  $S$  ici, ce qui n'est pas très agréable ni pratique à utiliser ensuite. On préfère donc effectuer une régularisation parabolique. Celle-ci consiste à introduire un paramètre  $\nu \in ]0, 1[$  et à étudier le système suivant d'inconnue  $U^\nu$  :

$$\begin{cases} S\partial_t U^\nu + A(\underline{U})\partial_x U^\nu = \nu\partial_x^2 U^\nu, \\ U^\nu|_{t=0} = U_0. \end{cases} \quad (12)$$

En particulier, pour  $\nu = 0$ , on reconnaît le système (11) que l'on cherche à résoudre. La stratégie est donc de montrer que le système (12) admet une unique solution  $U^\nu$  pour chaque  $\nu \in ]0, 1[$  puis de faire tendre  $\nu$  vers 0. Toutefois, pour que ce problème soit bien posé, on verra qu'on a besoin d'avoir plus de régularité, notamment en ce qui concerne la matrice  $A(\underline{U})$ . On suppose alors que  $U_0 \in H^\infty$  et  $A \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^\infty)$  et on verra comment s'affranchir de ces hypothèses de régularité dans un second temps.

### **Proposition III.6**

*Soit  $\nu \in ]0, 1[$ . Il existe  $T_\nu > 0$  tel que le système (12) admet une unique solution  $U^\nu$  sur  $[0, T_\nu]$ .*

**Démonstration :** Pour montrer ce résultat (à  $\nu \in ]0, 1[$  fixé), on commence par regarder le système simplifié

$$\begin{cases} S\partial_t U^\nu = \nu\partial_x^2 U^\nu, \\ U^\nu|_{t=0} = U_0. \end{cases}$$

On peut résoudre ce problème en appliquant la transformée de Fourier (légitime car on cherche une solution dans  $Y^s$  donc en particulier dans  $L^2$ ) : il admet une unique solution que l'on note  $W(t)U_0$  à l'instant  $t$ .

Cet opérateur  $W$  ainsi défini vérifie les propriétés suivantes :  $W$  et  $\partial_x$  commutent et pour tout  $F \in L^2$ , on a  $\|\partial_x W(t)F\|_{L^2} = \|W(t)\partial_x F\|_{L^2} = \left\| \frac{\sqrt{\nu t}}{\sqrt{\nu t}} \xi e^{-t\xi^2\nu} \hat{F}(\xi) \right\|_{L^2_\xi} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \|F\|_{L^2}$  d'après la formule de Plancherel donc  $\|\partial_x W(t)F\|_{Y^0} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\nu t}} \|F\|_{Y^0}$ . De plus,  $\|W(t)F\|_{Y^0} \lesssim \|F\|_{Y^0}$ .

Ainsi, en sommant ces estimées, on obtient  $\|W(t)F\|_{Y^1} \lesssim \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\right) \|F\|_{Y^0}$ . On en déduit plus généralement (de la même manière) que, pour tout  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\|W(t)F\|_{Y^{s+1}} \lesssim \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\right) \|F\|_{Y^s}$ .

Revenons maintenant à l'étude du système (12) : d'après la formule de Duhamel, toute solution  $U^\nu$  vérifie

$$U^\nu(t, \cdot) = W(t)U_0 - \int_0^t W(t-\tau)(A(\underline{U})\partial_x U^\nu)(\tau) d\tau \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

Soient  $T_\nu > 0$  et  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  fixés.

L'équation intégrale vérifiée par  $U^\nu$  amène à considérer l'application :

$$\Phi : U \in \mathcal{C}^0([0, T_\nu]; Y^s) \mapsto \left( (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T_\nu] \mapsto W(t)U_0 - \int_0^t W(t-\tau)(A(\underline{U})\partial_x U)(\tau) d\tau \right) \in \mathcal{C}^0([0, T_\nu]; Y^s).$$

Montrons que cette application est contractante (et bien définie par la même occasion) : considérons

$U, V \in \mathcal{C}^0([0, T_\nu]; Y^s)$ . Par définition de  $\Phi$  et l'inégalité triangulaire, pour tout  $t \in [0, T_\nu]$ , on a :

$$\begin{aligned} \|(\Phi(U) - \Phi(V))(t, \cdot)\|_{Y^s} &\leq \int_0^t \|W(t-\tau)(A(\underline{U})\partial_x(U-V))(\tau)\|_{Y^s} d\tau \text{ donc il existe } C > 0 \text{ tel que} \\ \|(\Phi(U) - \Phi(V))(t, \cdot)\|_{Y^s} &\leq \int_0^t C \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu(t-\tau)}}\right) \|A(\underline{U})\partial_x(U-V)(\tau)\|_{Y^{s-1}} d\tau \text{ d'après la propriété} \end{aligned}$$

vérifiée par  $W$  énoncée ci-dessus. Ensuite, l'inégalité du produit des normes (on a bien  $s-1 \in \mathbb{N}^*$ ) donne :

$$\|(\Phi(U) - \Phi(V))(t, \cdot)\|_{Y^s} \leq \int_0^t C \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu(t-\tau)}}\right) \|A(\underline{U})\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^{s-1})} \|\partial_x(U-V)\|_{Y^{s-1}}(\tau) d\tau.$$

De plus, comme la norme  $Y^s$  est définie à partir de normes  $H^s$ , on en déduit que :

$$\|(\Phi(U) - \Phi(V))(t, \cdot)\|_{Y^s} \leq \int_0^t C \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu(t-\tau)}}\right) \|A(\underline{U})\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^{s-1})} \|U-V\|_{Y^s}(\tau) d\tau.$$

Or,  $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\nu(t-\tau)}} d\tau = 2\sqrt{\frac{t}{\nu}}$  donc on obtient finalement une inégalité de la forme

$$\|(\Phi(U) - \Phi(V))(t, \cdot)\|_{Y^s} \leq C \times \left(t + 2\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right) \|A(\underline{U})\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^{s-1})} \|U-V\|_{L^\infty, Y^s} \text{ donc}$$

$$\|(\Phi(U) - \Phi(V))(t, \cdot)\|_{Y^s} \leq 2C \times \left(T_\nu + \sqrt{\frac{T_\nu}{\nu}}\right) \|A(\underline{U})\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^{s-1})} \|U-V\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^s), \text{ d'où :}$$

$$\|\Phi(U) - \Phi(V)\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^s)} \leq 2C \times \left(T_\nu + \sqrt{\frac{T_\nu}{\nu}}\right) \|A(\underline{U})\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^{s-1})} \|U-V\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^s)}.$$

Ainsi, pour  $T_\nu$  assez petit (tel que  $C \times \left(T_\nu + 2\sqrt{\frac{T_\nu}{\nu}}\right) \times \|A(\underline{U})\|_{L^\infty([0, T_\nu]; Y^s)} \leq \frac{1}{2}$  par exemple), on obtient que  $\Phi$  est contractante (et bien définie d'après cette inégalité appliquée avec  $V$  nulle).

Par conséquent,  $\mathcal{C}^0([0, T_\nu]; Y^s)$  étant un espace de Banach, le théorème de point fixe donne l'existence d'un unique  $U^\nu$  tel que  $\Phi(U^\nu) = U^\nu$  sur  $[0, T_\nu]$  et ce point fixe  $U^\nu$  est clairement solution du problème (12).  $\square$

Plus précisément, il existe un  $T > 0$  uniforme (indépendant de  $\nu$ ) tel que pour tout  $\nu$ , le résultat précédent est vrai sur  $[0, T]$ . Pour le voir, on peut par exemple procéder comme dans la démonstration habituelle du théorème de Cauchy-Lipschitz global, en considérant la norme définie par  $\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|U(t, \cdot)\|_{Y^s}$  et en utilisant les mêmes manipulations.

Pour conclure la démonstration du théorème III.5, il faut pouvoir justifier qu'on peut faire tendre  $\nu$  vers 0, c'est-à-dire que  $(U_\nu)$  converge lorsque  $\nu \rightarrow 0$ . Pour cela, on a au préalable besoin d'une inégalité d'énergie similaire à celle obtenue en début de cette démonstration mais adaptée au système (12) et avec

une majoration indépendante de  $\nu$  :

**Lemme III.7**

Soit  $s \in \mathbb{N}$ . Pour  $t \in [0, T]$ , il existe  $C_T > 0$  tel que pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ ,  $\mathcal{E}^s(U^\nu(t)) \leq C_T \mathcal{E}^s(U_0)$ .

**Démonstration :** Pour obtenir cette inégalité d'énergie, on s'inspire de la démonstration effectuée pour obtenir celle du théorème III.5. On considère donc un réel  $\lambda > 0$  et on calcule

$e^{\lambda t} \partial_t (e^{-\lambda t} \mathcal{E}^s(U^\nu(t))) = -\lambda \mathcal{E}^s(U^\nu(t)) + \partial_t (\mathcal{E}^s(U^\nu(t)))$  avec, d'après l'équation vérifiée par  $U^\nu$  :

$$\partial_t (\mathcal{E}^s(U^\nu(t))) = 2 \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s S \partial_t U^\nu \rangle = -2 \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s A(\underline{U} \partial_x U^\nu) \rangle + 2 \langle \Lambda^s U^\nu \mid \nu \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle.$$

On peut majorer le premier terme exactement comme on l'a fait lors de l'obtention de la première inégalité d'énergie (quand on avait fait apparaître la somme de quatre termes  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ ), ce qui donne une majoration de la forme :

$$|-2 \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s A(\underline{U} \partial_x U^\nu) \rangle| \leq \varepsilon C(\|\underline{U}\|_{H^s}) \mathcal{E}^s(U^\nu)^2.$$

On s'intéresse alors au second terme :  $\langle \Lambda^s U^\nu \mid \nu \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle = \nu \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle$ .

Montrons que  $\langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle \leq \mathcal{E}^s(U^\nu)^2$ . Pour cela, on calcule la différence

$$\mathcal{E}^s(U^\nu)^2 - \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle = \langle \Lambda^s U^\nu \mid S \Lambda^s U^\nu - \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle.$$

En utilisant la définition de  $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \end{pmatrix}$  et les notations  $U^\nu := \begin{pmatrix} \zeta^\nu \\ u^\nu \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\mathcal{E}^s(U^\nu)^2 - \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle = \langle \Lambda^s \zeta^\nu \mid \Lambda^s \zeta^\nu - \Lambda^s \partial_x^2 \zeta^\nu \rangle + \langle \Lambda^s u^\nu \mid \Lambda^s u^\nu - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \Lambda^s u^\nu - \partial_x^2 \Lambda^s u^\nu \rangle$$

$$\mathcal{E}^s(U^\nu)^2 - \langle \Lambda^s U^\nu \mid \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle = \|\Lambda^s \zeta^\nu\|_{L^2}^2 + \|\partial_x \Lambda^s \zeta^\nu\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^s u^\nu\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\mu}{3} + 1\right) \|\partial_x \Lambda^s u^\nu\|_{L^2}^2 \geq 0$$

après avoir intégré par parties. Ainsi,  $|\langle \Lambda^s U^\nu \mid \nu \Lambda^s \partial_x^2 U^\nu \rangle| \leq \nu \mathcal{E}^s(U^\nu(t))^2$ .

En sommant les deux majorations obtenues, on en déduit que :

$$|e^{\lambda t} \partial_t (e^{-\lambda t} \mathcal{E}^s(U^\nu(t)))| \leq (\varepsilon C(\|\underline{U}\|_{H^s}) + \nu - \lambda) \mathcal{E}^s(U^\nu(t))^2.$$

$$\text{Or, } \nu \in ]0, 1[ \text{ donc } |e^{\lambda t} \partial_t (e^{-\lambda t} \mathcal{E}^s(U^\nu(t)))| \leq (\varepsilon C(\|\underline{U}\|_{H^s}) + 1 - \lambda) \mathcal{E}^s(U^\nu(t))^2.$$

Aussi, on suppose ici que  $\varepsilon$  est petit (par l'hypothèse physique considérée) donc il existe  $\lambda > 0$  assez grand tel que  $\varepsilon C(\|\underline{U}\|_{H^s}) + 1 - \lambda < 0$  et ce  $\lambda$  assez grand est bien indépendant de  $\nu$ . Ainsi, pour un tel  $\lambda$ , on a

$\partial_t (e^{-\lambda t} \mathcal{E}^s(U^\nu(t))) \leq 0$ . En intégrant entre 0 et  $t \in [0, T]$ , cela donne :

$$\mathcal{E}^s(U^\nu(t))^2 \leq e^{\lambda t} \mathcal{E}^s(U_0)^2 \leq e^{\lambda T} \mathcal{E}^s(U_0)^2 \text{ car } t \in [0, T] \text{ donc } C_T := e^{\frac{\lambda T}{2}} \text{ convient.} \quad \square$$

Dans cette démonstration, on a implicitement utilisé le fait que  $\zeta^\nu$  est au moins dans  $H^{s+1}$  et même que  $A(\underline{U}) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^\infty)$  et  $U_0 \in H^\infty$ . On verra en fin de démonstration qu'on peut effectivement se ramener à ce cadre.

Avant cela, on va finir de montrer qu'on peut faire tendre  $\nu$  vers 0 dans la régularisation parabolique. Pour cela, on développe les arguments esquissés dans [4]. Par la proposition précédente III.6 étudiant la régularisation parabolique, on sait que pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ , il existe  $U^\nu$  solution de

$$\begin{cases} S\partial_t U^\nu + A(\underline{U})\partial_x U^\nu = \nu\partial_x^2 U^\nu, \\ U^\nu|_{t=0} = U_0. \end{cases} \quad (12)$$

De plus, pour  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ , d'après le lemme III.7, on a l'inégalité d'énergie :

$\mathcal{E}^s(U^\nu(t)) \leq E_s := C_T \mathcal{E}^s(U_0)$  pour tous  $\nu \in ]0, 1[$  et  $t \in [0, T]$ . Par conséquent, pour  $\nu \in ]0, 1[$ , on a  $\|S\partial_t U^\nu\|_{H^s} = \|\nu\partial_x^2 U^\nu - A(\underline{U})\partial_x U^\nu\|_{H^s} \leq \|\nu\partial_x^2 U^\nu\|_{H^s} + \|A(\underline{U})\partial_x U^\nu\|_{H^s}$  donc il existe  $C > 0$  telle que  $\|S\partial_t U^\nu\|_{H^s} \leq \|U^\nu\|_{H^{s+2}} + C\|A(\underline{U})\|_{H^s}\|U^\nu\|_{H^{s+1}}$  par l'inégalité du produit des normes.

Ainsi,  $\|S\partial_t U^\nu\|_{H^s} \leq (1 + C\|A(\underline{U})\|_{H^s})\|U^\nu\|_{H^{s+2}} \leq (1 + C\|A(\underline{U})\|_{H^s})C_T \mathcal{E}^{s+2}(U_0) \leq D_{s+2}$  où la constante  $D_{s+2} := (1 + C\|A(\underline{U})\|_{H^s})E_{s+2}$  ne dépend que de  $T$ ,  $s + 2$ ,  $A(\underline{U})$  et  $U_0$ .

Cette majoration va servir à appliquer le théorème d'Ascoli. On note  $\mathcal{A} := \{U^\nu, \nu \in ]0, 1[\}$  et on considère l'espace  $X^s := \{f \in H^s, \|f\|_{H^s} \leq E_s\}$ . Vérifions les hypothèses de ce théorème :  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0([0, T], X^s)$  avec  $[0, T]$  compact et  $X^s$  complet car  $H^s$  l'est. De plus, l'inégalité précédente donne que  $(U^\nu)_{\nu \in ]0, 1[}$  est  $D_{s+2}$ -lipschitzienne donc  $A$  est équicontinue. Il reste à vérifier que  $\{U^\nu(t, \cdot), \nu \in ]0, 1[\}$  est relativement compact pour tout  $t \in [0, T]$ . Cela s'obtient en munissant  $X^s$  de la distance  $d$  définie par, pour  $f$  et  $g$  dans  $X^s$ ,  $d(f, g) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle x_k | f - g \rangle|}{1 + |\langle x_k | f - g \rangle|}$ , où  $(x_k)$  est une suite dense de l'espace  $\{f \in X^s, \|f\|_{H^s} \leq 1\}$ , et en observant que  $(X^s, d)$  est compact pour la topologie faible.

Ainsi, d'après le théorème d'Ascoli,  $\mathcal{A}$  est relativement compact dans  $(\mathcal{C}^0([0, T]; X^s), d_\infty)$  : il existe une suite extraite  $(\nu_l)_{l \in \mathbb{N}} \in ]0, 1[^\mathbb{N}$  et  $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; X^s)$  telles que  $\nu_l \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $U^{\nu_l} \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} U$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; X_f^s)$  où on utilise la notation en indice  $\cdot_f$  pour préciser qu'il s'agit de la topologie faible (et on notera  $\cdot_F$  pour la topologie forte). Comme  $U^{\nu_l} \xrightarrow[l \rightarrow +\infty]{} U$ , on a  $\|U^{\nu_l}\|_{Y^s} \leq \varliminf_{l \rightarrow +\infty} \|U^{\nu_l}\|_{Y^s} < +\infty$  donc  $U \in L^\infty([0, T]; H_F^s)$  :  $(U^{\nu_l})_{l \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; X_F^s)$ .

De plus, on a vu que  $\|S\partial_t U^\nu\|_{H^s} \leq D_{s+2}$  donc pour tous  $\tilde{t} \leq t \in [0, T]$ , on a :

$$\|S(U^{\nu_l}(t, \cdot) - U^{\nu_l}(\tilde{t}, \cdot))\|_{H^s} \leq D_{s+2}|t - \tilde{t}|. \text{ En faisant tendre } l \text{ vers } +\infty, \text{ on obtient :}$$

$$\|S(U(t, \cdot) - U(\tilde{t}, \cdot))\|_{H^s} \leq D_{s+2}|t - \tilde{t}| \text{ donc, en particulier, } U \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^s).$$

Comme  $\|\cdot\|_{H^s} \lesssim \|\cdot\|_{Y^s}$ , on en déduit que  $U \in \mathcal{C}^0([0, T], Y^s)$ .

Il reste alors à vérifier que  $U$  est bien solution de (11). Considérons  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et un réel  $R > 0$  tel

que le support de  $\chi$  soit inclus dans  $[-R, R]$ . Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\chi U^{\nu_l} \in H^s([-R, R])$ , où on rappelle que  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ . Or, d'après le théorème de Rellich, l'injection  $H^s([-R, R]) \hookrightarrow H^{s-1}([-R, R])$  est compacte donc, à une extraction supplémentaire près (que l'on ne note pas pour simplifier l'écriture), on a :

$\|\chi(U^{\nu_l} - U)\|_{H^{s-1}} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ . On veut que cela soit valable pour toute fonction  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  : pour passer de  $[-R, R]$  à tout  $\mathbb{R}$ , on peut effectuer une extraction diagonale. Par conséquent, quitte à extraire de nouveau, on obtient :  $\forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \|\chi(U^{\nu_l} - U)\|_{H^{s-1}} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit donc les convergences suivantes :  $\chi A(t, \cdot) \partial_x U^{\nu_l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \chi A(t, \cdot) \partial_x U$  et  $\chi \nu_l \partial_x^2 U^{\nu_l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, pour  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  fixée, l'équation du problème (12) donne que  $(\chi S \partial_t U^{\nu_l})_l$  est de Cauchy dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; H_F^{s-3})$  donc converge vers une fonction  $V_\chi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^{s-3})$  (on peut avoir  $s - 3 < 0$  ici : dans ce cas, on voit l'espace  $H^{s-3}$  à partir de la définition issue des distributions) .

De plus,  $\chi U^{\nu_l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \chi U$  donc  $\chi U \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^{s-3})$ . Comme on sait que  $H^{s-3}$  est un espace de Banach et  $\frac{d}{dt}(\chi S U^{\nu_l}) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} V_\chi$ , on en déduit que  $\frac{d}{dt}(\chi S U) = V_\chi$ .

Finalement, pour tout  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on a  $\chi(S \partial_t U + A \partial_x U) = 0$ , d'où  $S \partial_t U + A \partial_x U = 0$  :  $U$  est bien solution de (11) et on a  $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^\infty)$  car  $A \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^\infty)$ . En passant aussi à la limite dans l'inégalité d'énergie uniforme en  $\nu$ , on observe que cette solution vérifie :  $\forall t \in [0, T], \mathcal{E}^s(U(t)) \leq C_T \mathcal{E}^s(U_0)$ .

Pour achever rigoureusement la démonstration, il reste à vérifier qu'on peut retirer les hypothèses de régularité supplémentaires considérées lors de la régularisation parabolique (les hypothèses que  $U_0 \in H^\infty$  et  $A(U) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^\infty)$ ). Par une régularisation en espace, justifions alors qu'on peut se ramener à ce cadre. On suppose donc dorénavant qu'on a seulement  $A := A(U) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^s)$  et  $U_0 \in H^s$  pour un  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  fixé.

Pour effectuer cette régularisation en espace, on considère  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  telle que  $\chi$  est constante égale à 1 au voisinage de 0 et l'opérateur  $T_0 := \text{id}$  et  $T_n := \chi\left(\frac{D}{n}\right)$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ , défini avec les notations des multiplicateurs de Fourier (cela signifie que  $\widehat{T_n f}(\xi) = \chi\left(\frac{\xi}{n}\right) \hat{f}(\xi)$  pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ ). On définit alors les suites  $(U_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_0^n := T_n U_0$  et  $A^n = T_n A(t, \cdot)$  (pour un temps  $t$  fixé). En particulier, on a  $U_0^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et les propriétés suivantes :

### Lemme III.8

Soit  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ . Pour  $U_0 \in H^s$ , on a  $U_0^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} U_0$ ,  $n \|U_0^n - U_0\|_{H^{s-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\frac{1}{n} \|U_0^n\|_{H^{s+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Démonstration :** Commençons par vérifier que  $U_0^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H^s} U_0$  : pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on observe que

$$\|U_0^n - U_0\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s \left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 d\xi.$$

Or,  $\left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2 \leq 1$  qui ne dépend pas de  $n$ ,  $(1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 \in L^1(\mathbb{R})$  puisque  $U_0 \in H^s$  et  $1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  (car  $\chi(0) = 1$  et  $\chi$  est continue) donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s \left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 d\xi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ d'où } \|U_0^n - U_0\|_{H^s} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ensuite, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculons

$$n^2 \|U_0^n - U_0\|_{H^{s-1}}^2 = \int_{\mathbb{R}} n^2 (1 + \xi^2)^{s-1} \left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} n^2 \frac{\left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2}{1 + \xi^2} (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 d\xi.$$

Comme  $\chi$  est constante au voisinage de 0, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\left| n^2 \frac{\left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2}{1 + \xi^2} (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 \right| \leq \frac{\mathcal{K}^2}{1 + \xi^2} \|\chi'\|_{L^\infty}^2 \frac{|\xi|^2}{\mathcal{K}^2} (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 \leq \|\chi'\|_{L^\infty}^2 (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 \text{ qui est}$$

intégrable et indépendant de  $n$ . De plus, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left| n^2 \frac{\left(1 - \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^2}{1 + \xi^2} (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 \right| \leq \frac{n^2}{1 + \xi^2} \|\chi''\|_{L^\infty}^2 \frac{|\xi|^4}{4n^4} (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0(\xi)^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On peut donc également appliquer le théorème de convergence dominée :

$$n^2 \|U_0^n - U_0\|_{H^{s-1}}^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \text{ d'où } n \|U_0^n - U_0\|_{H^{s-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\text{Enfin, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \|U_0^n\|_{H^{s+1}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^2} (1 + \xi^2) (1 + \xi^2)^s \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 d\xi.$$

Or,  $\chi$  est à support compact donc il existe  $M > 0$  tel que  $\forall |x| > M$ ,  $\chi(x) = 0$  donc on peut réécrire cette intégrale  $\frac{1}{n^2} \|U_0^n\|_{H^{s+1}}^2 = \int_{-Mn}^{Mn} \frac{1}{n^2} (1 + \xi^2) (1 + \xi^2)^s \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 d\xi$ .

Regardons alors l'intégrande. Pour tout  $\xi \in [-Mn, Mn]$ , on a :

$$\left| \frac{1}{n^2} (1 + \xi^2) (1 + \xi^2)^s \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 \right| \leq \frac{1}{n^2} (1 + M^2 n^2) (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0^2 \leq (1 + M^2) (1 + \xi^2)^s \hat{U}_0^2 \text{ qui est indépendant de}$$

$n$  et intégrable (car  $U_0 \in H^s$ ). Aussi,  $\left| \frac{1}{n^2} (1 + \xi^2) (1 + \xi^2)^s \chi\left(\frac{\xi}{n}\right)^2 \hat{U}_0(\xi)^2 \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} (1 + \xi^2)^{s+1} \hat{U}_0^2(\xi) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

donc, par convergence dominée, on obtient bien que  $\frac{1}{n} \|U_0^n\|_{H^{s+1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .  $\square$

Maintenant, à partir des suites  $(A^n)$  et  $(U_0^n)$ , on considère la suite  $(U^n)$  définie pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  par le système

$$\begin{cases} S \partial_t U^n + A^n \partial_x U^n = 0, \\ U^n|_{t=0} = U_0^n. \end{cases}$$

Chaque  $U^n$  est bien défini d'après le résultat obtenu par régularisation parabolique (puisque, par construction, chaque  $A^n \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^\infty)$  et chaque  $U_0^n \in H^\infty$ ). Montrons que la suite  $(U^n)$  converge. L'espace de Sobolev  $H^s$  étant complet, il suffit de vérifier qu'elle est de Cauchy. Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Calculons

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 \right) = \frac{d}{dt} \langle \Lambda^s(U^n - U^m) \mid S\Lambda^s(U^n - U^m) \rangle = 2 \langle S\Lambda^s \partial_t(U^n - U^m) \mid \Lambda^s(U^n - U^m) \rangle.$$

Or,  $U^n$  et  $U^m$  vérifient  $S\partial_t U^n + A^n \partial_x U^n = 0$  et  $S\partial_t U^m + A^n \partial_x U^m = 0$  donc, par différence de ces égalités,  $S\partial_t(U^n - U^m) + A^n \partial_x U^n - A^m \partial_x U^m = 0$ . Pour faire apparaître des différences, on réécrit cela  $S\partial_t(U^n - U^m) - A^n \partial_x(U^m - U^n) + (A^m - A^n) \partial_x U^m = 0$ . Par conséquent,

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 \right) = 2 \langle \Lambda^s A^n \partial_x(U^m - U^n) \mid \Lambda^s(U^n - U^m) \rangle + 2 \langle \Lambda^s(A^m - A^n) \partial_x U^m \mid \Lambda^s(U^n - U^m) \rangle. \text{ On}$$

raisonne alors comme en début de sous-partie (lorsqu'on a établi l'inégalité d'énergie pour le système (11)).

D'une part, on a :

$$|\langle \Lambda^s A^n \partial_x(U^m - U^n) \mid \Lambda^s(U^n - U^m) \rangle| \leq C_1 \|A^n\|_{H^s} \|U^m - U^n\|_{H^s} \|U^m - U^n\|_{H^s}, \text{ où } C_1 > 0, \text{ donc}$$

$$|\langle \Lambda^s A^n \partial_x(U^m - U^n) \mid \Lambda^s(U^n - U^m) \rangle| \leq C_1 \|A^n\|_{H^s} \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2.$$

D'autre part,  $|\langle \Lambda^s(A^m - A^n) \partial_x U^m \mid \Lambda^s(U^n - U^m) \rangle| \leq C_2 \|A^m - A^n\|_{L^\infty} \|\partial_x U^m\|_{H^s} \|U^n - U^m\|_{H^s}$  pour un  $C_2 > 0$  (avec  $\|\partial_x U^m\|_{H^s} < +\infty$  car  $U^m \in H^\infty$ ).

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 \right) \leq C_1 \|A^n\|_{H^s} \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 + C_2 \|A^m - A^n\|_{L^\infty} \|\partial_x U^m\|_{H^s} \|U^n - U^m\|_{H^s}.$$

On réécrit le dernier terme en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique et le fait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|U^n - U^m\|_{H^s} \leq C \mathcal{E}^s(U^n - U^m)$  :

$$\|\partial_x U^m\|_{H^s} \|U^n - U^m\|_{H^s} \leq \frac{\|\partial_x U^m\|_{H^s}^2 + C^2 \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{d}{dt} \left( \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 \right) \leq \tilde{C} (\|A^n\|_{H^s} + \|A^m - A^n\|_{L^\infty}) \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 + C_2 \|A^m - A^n\|_{L^\infty} \|\partial_x U^m\|_{H^s}^2$$

où  $\tilde{C} := \max(C_1, C_2^2)$ . Cette inégalité ainsi écrite permet d'utiliser le lemme de Grönwall. Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^s(U^n - U^m)^2 &\leq \mathcal{E}^s(U_0^n - U_0^m)^2 e^{\tilde{C} \int_0^t \|A^n(\tau, \cdot)\|_{H^s} + \|(A^m - A^n)(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} d\tau} \\ &\quad + \int_0^t e^{\tilde{C} \int_s^t \|A^n(\tau, \cdot)\|_{H^s} + \|(A^m - A^n)(\tau, \cdot)\|_{L^\infty} d\tau} C_2 \|A^m - A^n\|_{L^\infty} \|\partial_x U^m\|_{H^s}^2 ds. \end{aligned}$$

Puisque les termes apparaissant dans les intégrales sont bornés lorsque  $m, n \rightarrow +\infty$  (car  $(A^n)$  converge),

$$\|\partial_x U^m\|_{H^s}^2 \in L^1, \mathcal{E}^s(U_0^n - U_0^m)^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \|A^m - A^n\|_{L^\infty} \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0, \text{ cette inégalité permet d'obtenir}$$

$$\mathcal{E}^s(U^n - U^m) \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Ainsi, par le lemme III.4, } \|U^n - U^m\|_{Y^s} \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc la suite } (U^n) \text{ est de}$$

Cauchy dans  $Y^s$  qui est complet (car  $H^s$  l'est) donc elle converge vers un  $U_{\text{sol}} \in H^s$ .

On passe alors à la limite ( $n \rightarrow +\infty$ ) dans

$$\begin{cases} S\partial_t U^n + A^n \partial_x U^n = 0, \\ U^n|_{t=0} = U_0^n. \end{cases}$$

Par constructions des suites  $(A^n)$  et  $(U^n)$ , cela donne :

$$\begin{cases} S\partial_t U_{\text{sol}} + A(\underline{U})\partial_x U_{\text{sol}} = 0, \\ U_{\text{sol}}|_{t=0} = U_0. \end{cases}$$

Ainsi, cette limite  $U_{\text{sol}}$  convient : on a obtenu une unique solution au problème linéarisé autour de  $\underline{U}$ .  $\square$

### III.3 Fin de la justification de l'existence locale

On peut maintenant revenir au problème non linéaire du départ (toujours considéré après le changement de variable du début de la partie) :

$$\begin{cases} S\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0, \\ U|_{t=0} = U_0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que ce problème admet une unique solution localement en établissant le théorème suivant qui est le principal résultat de ce début de stage :

#### **Théorème III.9**

Soient  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  et  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . Si  $h_0 > 0$  et  $U_0 = (\zeta_0, u_0) \in Y^s$  sont tels que  $1 + \varepsilon\zeta_0 \geq h_0$  sur  $\mathbb{R}$  alors il existe  $T_0 > 0$  tel que le problème non linéaire ci-dessus admet une unique solution  $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; Y^s)$  avec  $1 + \varepsilon\zeta \geq \frac{h_0}{2} > 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $T := \frac{T_0}{\varepsilon}$  indépendant de  $\varepsilon$ .

De plus, il existe une constante  $C > 0$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) telle que  $\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}^s(U(t)) \leq C\mathcal{E}^s(U_0)$ .

**Démonstration :** Comme le fait Israwi dans [5] pour l'équation de Green-Naghdi, on se ramène au cas linéaire étudié précédemment en considérant une suite  $(U^n)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{cases} S\partial_t U^{n+1} + A(U^n)\partial_x U^{n+1} = 0, \\ U^{n+1}|_{t=0} = U_0. \end{cases}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après le cas linéaire, on sait qu'il existe  $T_0 > 0$  et une unique solution  $U^{n+1} \in \mathcal{C}^0([0, T]; Y^s)$  lorsque  $U^n \in \mathcal{C}^0([0, T]; Y^s)$  et  $1 + \varepsilon\zeta_n \geq h_0 > 0$ . On cherche donc à vérifier par récurrence que c'est bien le cas. L'initialisation étant claire d'après l'hypothèse, il suffit de vérifier l'hérédité : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que l'on a  $U^n \in \mathcal{C}^0([0, T]; Y^s)$  et  $1 + \varepsilon\zeta_n \geq h_0 > 0$ . Soit  $R > 0$  tel que  $\mathcal{E}^s(U^0) \leq \frac{R}{2}$ .

D'après le théorème III.5, on sait que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{E}^s(U^{n+1}(t)) \leq e^{\frac{\varepsilon\lambda T_0 t}{2}} \mathcal{E}^s(U_0) \leq e^{\frac{\varepsilon\lambda T_0 t}{2}} \frac{R}{2}$ .

En particulier, il existe  $T > 0$  assez petit (inférieur à  $\frac{2\ln(2)}{\varepsilon\lambda T_0}$ ) tel que  $\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}^s(U^{n+1}(t)) \leq R$ .

Par le lemme III.4, on en déduit que  $\sup_{t \in [0, T]} \|U^{n+1}(t)\|_{Y^s} \leq R$ . Or, d'après l'équation, on a :

$$\partial_t \zeta^{n+1} + \varepsilon u^n \partial_x \zeta^n + h^n \partial_x u^{n+1} = 0 \text{ donc}$$

$$\|\partial_t h^{n+1}\|_{L^\infty} = \varepsilon \|\partial_t \zeta^{n+1}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon (\|h^n \partial_x u^{n+1}\|_{L^\infty} + \varepsilon \|\partial_x \zeta^{n+1} u^n\|_{L^\infty}).$$

L'injection de Sobolev puis l'inégalité pour le produit des normes donnent alors :

$$\begin{aligned} \|\partial_t h^{n+1}\|_{L^\infty} &\leq \varepsilon C \times (\|h^n \partial_x u^{n+1}\|_{H^1} + \varepsilon \|\partial_x \zeta^{n+1} u^n\|_{H^1}) \leq \varepsilon C' \times (\|h^n\|_{H^1} \|u^{n+1}\|_{H^2} + \|h^{n+1}\|_{H^2} \|u^n\|_{H^1}) \\ &\leq \varepsilon C' \times (\|h^n\|_{H^1}^2 + \|u^{n+1}\|_{H^2}^2 + \|h^{n+1}\|_{H^2}^2 + \|u^n\|_{H^1}^2) \leq \varepsilon R \text{ puisque } \|U^{n+1}\|_{L^\infty} \leq R. \end{aligned}$$

Ensuite, on écrit que  $h^{n+1}(t, \cdot) = h^{n+1}|_{t=0} + \int_0^t \partial_t h^{n+1}$ .

D'une part, on sait que  $h^{n+1}|_{t=0} \geq h_0$  par hypothèse et, d'autre part,

$$\left| \int_0^t \partial_t h^{n+1} \right| \leq \varepsilon T \|\partial_t h^{n+1}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon T R \text{ donc, pour } \varepsilon T > 0 \text{ assez petit, } h^{n+1}(t, \cdot) \geq \frac{h_0}{2}.$$

Ainsi,  $\inf_{\mathbb{R}} h^{n+1} \geq \frac{h_0}{2}$ , ce qui est bien le résultat voulu. On peut donc utiliser le résultat du théorème III.5 :

la suite  $(U^n)$  est bien définie et vérifie l'inégalité d'énergie  $\mathcal{E}^s(U^n(t)) \leq e^{\frac{\varepsilon \lambda_{T_0} t}{2}} \mathcal{E}^s(U_0)$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, T]$  (quitte à réduire  $\varepsilon T > 0$  de sorte que ce temps  $T$  ne dépend pas de  $n$  ni de  $\varepsilon$  et  $\mu$ ). Cette

inégalité d'énergie étant similaire à celle utilisée pour le cas linéaire de la sous-partie précédente (avec une majoration indépendante de  $n$ ), on peut raisonner comme dans ce cas. On obtient ainsi l'existence d'une

solution sur un intervalle  $[0, T]$  et l'estimée voulue avec  $C := e^{\frac{\lambda_{T_0} T_0}{2}}$  (la nature de la borne en  $\frac{T_0}{\varepsilon}$  est due à cette inégalité d'énergie).

Montrons maintenant l'unicité de cette solution : soient  $U_1$  et  $U_2$  deux solutions du problème

$$\begin{cases} S \partial_t U + A(U) \partial_x U = 0, \\ U|_{t=0} = U_0. \end{cases}$$

En particulier,  $S \partial_t U_1 + A(U_1) \partial_x U_1 = 0$  et  $S \partial_t U_2 + A(U_2) \partial_x U_2 = 0$ .

La différence  $V := U_1 - U_2$  est donc solution de  $S \partial_t V + A(U_1) \partial_x U_1 - A(U_2) \partial_x U_2 = 0$ .

Or, par définition de la proposition III.1, on a  $A(U) := \begin{pmatrix} \varepsilon u & h \\ h & \varepsilon u \end{pmatrix}$  avec  $h := 1 + \varepsilon \zeta$  donc  $A$  est linéaire par rapport à  $U := (\zeta, u)$ . En ajoutant et soustrayant  $A(U_1) \partial_x U_2$ , on en déduit alors que :

$$S \partial_t V + A(U_1) \partial_x (U_1 - U_2) + A(U_1 - U_2) \partial_x U_2 = 0$$

$$S \partial_t V + A(U_1) \partial_x (V) + A(V) \partial_x U_2 = 0.$$

Montrons que  $V$  est nécessairement nul. Pour cela, on multiplie l'équation précédente par  $V$  et on intègre :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}} S V \cdot V \right) + \int_{\mathbb{R}} A(U_1) \partial_x V \cdot V + \int_{\mathbb{R}} A(V) \partial_x U_2 \cdot V = 0.$$

En intégrant par parties, cela donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}} S V \cdot V \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x A(U_1) V \cdot V - \int_{\mathbb{R}} A(V) \partial_x U_2 \cdot V.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit qu'il existe  $C := C(\|U_1\|_{H^s}, \|U_2\|_{H^s}) > 0$  telle que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}^0(V)^2) \leq C \|V\|_{L^2}^2 \leq C \mathcal{E}^0(V)^2.$$

Ainsi, comme on l'a déjà vu plusieurs fois, le lemme de Grönwall donne que  $\mathcal{E}^0(V) = 0$  puisque  $V|_{t=0} = 0$ ,

d'où  $V = \tilde{0}$  et l'unicité de la solution :  $U_1 = U_2$ .  $\square$

### III.4 Retour sur le problème avant changement de variables

Maintenant qu'on a établi l'existence et l'unicité d'une solution à la version modifiée du problème (7) par le changement de variable de la proposition III.1, justifions que ce problème (7) avant changement de variable admet aussi une unique solution. On reprend alors les notations avec des tildes  $(\tilde{\zeta}, \tilde{u})$  de la proposition III.1 pour désigner les inconnues modifiées après changement de variable. On rappelle que  $\tilde{\zeta} := \frac{2}{\varepsilon} (\sqrt{1 + \varepsilon \zeta} - 1)$  et  $\tilde{u} := u$ . L'idée de ce changement de variable qui a permis d'obtenir un système symétrique est présentée par Sideris dans [9].

#### **Théorème III.10**

Soient  $s \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  et  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . Si  $h_0 > 0$  et  $U_0 = (\zeta_0, u_0) \in Y^s$  sont tels que  $1 + \varepsilon \zeta_0 \geq h_0$  sur  $\mathbb{R}$  alors il existe  $T_0 > 0$  tel que le problème (7) admet une unique solution  $U \in C^0([0, T]; Y^s)$  avec  $1 + \varepsilon \zeta \geq \frac{h_0}{2} > 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $T := \frac{T_0}{\varepsilon}$  indépendant de  $\varepsilon$ .

De plus, il existe une constante  $C > 0$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) telle que  $\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}^s(U(t)) \leq C \mathcal{E}^s(U_0)$ .

**Démonstration :** D'après le théorème III.9, il existe une unique solution  $\tilde{U} := (\tilde{\zeta}, \tilde{u})$  au problème

$$\begin{cases} S \partial_t \tilde{U} + A(\tilde{U}) \partial_x \tilde{U} = 0, \\ \tilde{U}|_{t=0} = \tilde{U}_0. \end{cases}$$

L'écriture du changement de variable inverse  $\zeta = \frac{1}{\varepsilon} \left( \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{\zeta} \right)^2 - 1 \right)$  et  $u = \tilde{u}$  et le lemme III.2 permettent alors d'obtenir directement l'existence et l'unicité de la solution  $U := (\zeta, u)$  sur  $[0, T]$  au problème

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \varepsilon \partial_x \zeta u + h \partial_x u = 0, \\ \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \partial_t u + \partial_x \zeta + \varepsilon u \partial_x u = 0. \end{cases} \quad (7)$$

L'inégalité d'énergie s'obtient également directement à partir du théorème III.9, de l'écriture du changement de variables et du lemme III.2.  $\square$

Par des arguments très similaires à ceux utilisés tout au long de cette partie, on peut également obtenir le résultat de stabilité suivant :

**Proposition III.11**

Soit  $(\zeta, u)$  solution du problème (7).

Si  $(\zeta_r, u_r)$  est solution de ce système avec second membre

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_r + \partial_x (h_r u_r) = \mu^2 r, \\ \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \partial_t u_r + \partial_x \zeta_r + \varepsilon u_r \partial_x u_r = \mu^2 R. \end{cases}$$

où  $h_r := 1 + \varepsilon \zeta_r$ ,  $\tilde{R} := (r, R) \in L^\infty([0, T]; H^s(\mathbb{R})^2)$  et si l'erreur  $E := (\zeta, u) - (\zeta_r, u_r)$  est telle que

$$E|_{t=0} = 0 \text{ alors on a } \|E\|_{L^\infty([0, T]; H^{s-1})} \lesssim \mu \|\tilde{R}\|_{L^\infty([0, T]; H^s)}.$$

**Démonstration :** Pour obtenir ce résultat, on fait la différence des équations vérifiées par  $(\zeta, u)$  et  $(\zeta_r, u_r)$  puis on utilise à nouveau une inégalité d'énergie adaptée et le lemme de Grönwall. On ne détaille pas l'obtention du résultat qui ressemble fortement à celui de la proposition 6.3. de [7].  $\square$

Ainsi, on a justifié que le système de Boussinesq approximant les équations des vagues est bien posé : on peut donc bien s'y ramener lorsque l'on souhaite étudier ces équations avec une erreur en  $O(\mu^2)$ .

## IV Dérivation de KdV par un développement BKW du système de Boussinesq

Dans cette dernière partie, nous allons dériver un modèle asymptotique scalaire à partir du système de Boussinesq (7) étudié dans la partie précédente pour obtenir l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) en faisant l'hypothèse supplémentaire que  $\varepsilon = \mu$  (toujours supposé petit). On s'inspire partiellement de ce que fait Lannes dans le chapitre 7 de [7] pour un système qui ressemble à celui de Boussinesq.

Effectuons un développement BKW du système (7) (écrit pour  $\varepsilon = \mu$ ) :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x u + \mu \partial_x (\zeta u) = 0, \\ \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \partial_t u + \partial_x \zeta + \mu u \partial_x u = 0. \end{cases} \tag{7}$$

On considère ici un ansatz de la forme :

$$\begin{cases} \zeta_{\text{app}}(t, x) = f(x - t, \mu t) + \mu \zeta_{(1)}(t, x, \mu t), \\ u_{\text{app}}(t, x) = f(x - t, \mu t) + \mu u_{(1)}(t, x, \mu t). \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction suffisamment régulière.

Il faudra vérifier après les calculs que cet ansatz est bien préparé.

Pour alléger l'écriture, on se permet de ne pas noter les variables (qui seront donc implicites) dans la suite. Pour  $\xi := x - t$  et  $\tau := \mu t$ , calculons les expressions intervenant dans (7) pour cet ansatz :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_{\text{app}} + \partial_x u_{\text{app}} + \mu \partial_x (\zeta_{\text{app}} u_{\text{app}}) = -\partial_\xi f + \mu \partial_\tau f + \mu \partial_t \zeta_{(1)} + \partial_\xi f + \mu \partial_x u_{(1)} + 2\mu f \partial_\xi f + \mu^2 R_1^{(2)}, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2) \partial_t u_{\text{app}} + \partial_x \zeta_{\text{app}} + \mu u_{\text{app}} \partial_x u_{\text{app}} = -\partial_\xi f + \mu \partial_\tau f + \mu \partial_t u_{(1)} + \partial_\xi f + \mu \partial_x \zeta_{(1)} + \mu f \partial_\xi f + \frac{\mu}{3} \partial_\xi^3 f + \mu^2 R_2^{(2)}. \end{cases}$$

où on a noté

$$\begin{cases} R_1^{(2)} := \partial_\tau \zeta_{(1)} + \partial_x (f(\zeta_{(1)} + u_{(1)})) + \mu \partial_x (\zeta_{(1)} u_{(1)}), \\ R_2^{(2)} := \partial_\tau u_{(1)} + \frac{1}{3} \partial_\xi^2 (\partial_t u_{(1)} - \partial_\tau f) + u_{(1)} \partial_\xi f + f \partial_x u_{(1)} + \mu \partial_\xi^2 \partial_\tau u_{(1)} + \mu u_{(1)} \partial_x u_{(1)}. \end{cases}$$

Avec ces notations, le système précédent se simplifie en :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_{\text{app}} + \partial_x u_{\text{app}} + \mu \partial_x (\zeta_{\text{app}} u_{\text{app}}) = \mu R_1^{(1)} + \mu^2 R_1^{(2)}, \\ (\text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2) \partial_t u_{\text{app}} + \partial_x \zeta_{\text{app}} + \mu u_{\text{app}} \partial_x u_{\text{app}} = \mu R_2^{(1)} + \mu^2 R_2^{(2)}. \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} R_1^{(1)} := \partial_\tau f + \partial_t \zeta_{(1)} + \partial_x u_{(1)} + 2f \partial_\xi f, \\ R_2^{(1)} := \partial_\tau f + \partial_t u_{(1)} + \partial_x \zeta_{(1)} + f \partial_\xi f + \frac{1}{3} \partial_\xi^3 f. \end{cases}$$

Pour que le modèle obtenu avec cet ansatz soit consistant à l'ordre 2 en  $\mu$ , on souhaite imposer que  $R_1^{(1)} = R_2^{(1)} = 0$ . Cela se traduit par le système

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_{(1)} + \partial_x u_{(1)} + \partial_\tau f + 2f \partial_\xi f = 0, \\ \partial_t u_{(1)} + \partial_x \zeta_{(1)} + \partial_\tau f + f \partial_\xi f + \frac{1}{3} \partial_\xi^3 f = 0. \end{cases}$$

On fait alors le changement de variables  $w_+ := \zeta_{(1)} + u_{(1)}$  et  $w_- = \zeta_{(1)} - u_{(1)}$ .

Par somme et différence des équations du système précédent, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t w_+ + \partial_x w_+ + 2\partial_\tau f + 3f \partial_\xi f + \frac{1}{3} \partial_\xi^3 f = 0, \\ \partial_t w_- - \partial_x w_- + f \partial_\xi f - \frac{1}{3} \partial_\xi^3 f = 0. \end{cases} \quad (13)$$

On reconnaît des équations de transport vérifiées par  $w_+$  et  $w_-$  lorsque  $f$  est fixée.

Le lemme suivant donnera une contrainte sur  $f$  pour éviter d'avoir une croissance linéaire :

**Lemme IV.1**

Soient  $c_1 \neq c_2 \in \mathbb{R}$  et  $(k_1, k_2) \in L^2(\mathbb{R})^2$  tel qu'il existe  $K_2 \in H^1$  vérifiant  $K_2' = k_2$ .

Si  $k$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t k + c_1 \partial_x k = k_1(x - c_1 t) + k_2(x - c_2 t), \\ k|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \|k(t, \cdot)\|_{L^2} = 0 \iff k_1 = \tilde{0}$ .

Dans ce cas,  $\|k(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \min\left(\frac{2}{|c_1 - c_2|} \|K_2\|_{L^2}, t \|k_2\|_{L^2}\right)$ .

**Démonstration :** On admet ce résultat ici : il s'agit essentiellement de résoudre l'équation de transport, la solution du problème s'écrivant  $k(t, x) = tk_1(x - c_1 t) + \frac{1}{c_1 - c_2}(K_2(x - c_2 t) - K_2(x - c_1 t))$ .

Une démonstration plus détaillée est présentée dans [7] au lemme 7.6.  $\square$

En appliquant ce lemme IV.1 à la première équation du système (13), on obtient que, pour éviter d'avoir une croissance linéaire de la solution de ce système, il faut imposer que  $2\partial_\tau f + 3f\partial_\xi f + \frac{1}{3}\partial_\xi^3 f = 0$ . En divisant par 2, cette équation se réécrit  $\partial_\tau f + \frac{3}{2}f\partial_\xi f + \frac{1}{6}\partial_\xi^3 f = 0$  : on reconnaît l'équation de KdV. Il n'y a en revanche pas de condition similaire issue de la seconde équation (car le membre dépendant de  $f$  est appliqué en  $(x - t, \mu t)$ ).

Avec l'estimée du lemme IV.1 précédent et par des arguments similaires à ceux utilisés par Lannes dans la sous-partie 7.1.4. de [7], on peut montrer que  $\|\zeta_{(1)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2} + \|u_{(1)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2} \leq C(\|f\|_{H^3})$ .

Pour estimer la norme de  $f$ , on a besoin d'un résultat sur l'équation de KdV :

**Lemme IV.2**

Soient  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $T > 0$ .

Pour tout  $f_0 \in H^s$ , il existe une unique solution  $f \in C^0([0, T]; H^s)$  au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_\tau f + \frac{3}{2}f\partial_\xi f + \frac{1}{6}\partial_\xi^3 f = 0, \\ f|_{\tau=0} = f_0. \end{cases} \quad (14)$$

De plus, cette solution vérifie l'estimée  $\|f\|_{L^\infty(0, T); H^s} \leq C(T, \|f_0\|_{H^s})$ .

**Démonstration :** On admet ce résultat sur l'équation de KdV qui est par exemple établi dans le théorème 2.1 dans [6]. On peut par exemple le montrer grâce à une régularisation parabolique comme pour le système Boussinesq mais en  $-\nu\partial_x^4 f$  ici.  $\square$

La dérivation générale de l'équation de KdV est par exemple présentée dans la partie 5.1 de [8].

C'est maintenant qu'il faut s'assurer d'avoir un ansatz bien préparé : on impose les conditions initiales

$\zeta|_{t=0} = u|_{t=0} = f(\xi, 0) =: f_0(\xi)$ . Dans ce cas, le lemme précédent permet d'obtenir :

$$\|\zeta_{(1)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2} + \|u_{(1)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2} \leq C(\tau, \|f_0\|_{H^3}).$$

On peut alors montrer que l'ansatz considéré ici est consistant pour les équations du système de Boussinesq à l'ordre  $O(\mu^2)$  :

### Proposition IV.3

Soient  $T > 0$  et  $f_0 \in H^5$ . L'ansatz

$$\begin{cases} \zeta_{\text{app}}(t, x) = f(x - t, \mu t) + \mu \zeta_{(1)}(t, x, \mu t), \\ u_{\text{app}}(t, x) = f(x - t, \mu t) + \mu u_{(1)}(t, x, \mu t). \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \zeta_{\text{app}} + \partial_x u_{\text{app}} + \mu \partial_x (\zeta_{\text{app}} u_{\text{app}}) = \mu^2 R_1^{(2)}, \\ \left( \text{id} - \frac{\mu}{3} \partial_x^2 \right) \partial_t u_{\text{app}} + \partial_x \zeta_{\text{app}} + \mu u_{\text{app}} \partial_x u_{\text{app}} = \mu^2 R_2^{(2)}. \end{cases}$$

avec les termes de restes vérifiant, pour tout  $t \in \left[0, \frac{T}{\mu}\right]$ ,

$$\mu^2 \|R_1^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} + \mu^2 \|R_2^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} \leq C_T \mu^2 \text{ pour une constante } C_T > 0.$$

**Démonstration :** Donnons les grandes idées de preuve pour obtenir l'estimée. Pour  $t \in \left[0, \frac{T}{\mu}\right]$ ,

$$\|R_1^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} \leq \sup_{t \in [0, \frac{T}{\mu}]} \sup_{\tau \in [0, T]} \|R_1^{(2)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2} \text{ et } \|R_2^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} \leq \sup_{t \in [0, \frac{T}{\mu}]} \sup_{\tau \in [0, T]} \|R_2^{(2)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2}.$$

Par définitions de  $R_1^{(2)}$  et  $R_2^{(2)}$  et en utilisant le lemme IV.1, on en déduit que :

$$\|R_2^{(2)}(t, \cdot, \tau)\|_{L^2} \leq C \left( \sup_{\tau \in [0, T]} \|f(\cdot, \tau)\|_{H^6} \right) \mu t.$$

On conclut alors avec le résultat précédent :

$$\mu^2 \|R_1^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} + \mu^2 \|R_2^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} \leq \mu^2 C(T, \|f_0\|_{H^6}) \leq C_T \mu^2. \quad \square$$

En intégrant l'inégalité obtenue par cette proposition, on peut en déduire que :

$$\int_0^{\frac{T}{\mu}} \left( \mu^2 \|R_1^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} + \mu^2 \|R_2^{(2)}(t, \cdot, \mu t)\|_{L^2} \right) dt \leq \mu^2 \left( 1 + \frac{T}{\mu} \right) \lesssim \mu.$$

Pour estimer l'écart entre la solution au système de Boussinesq (7) et celle donnée par l'équation de KdV,

on introduit l'ansatz précédent à l'aide de l'inégalité triangulaire : pour tout  $t \in \left[0, \frac{T}{\mu}\right]$ ,

$$\|(\zeta, u) - (\zeta_{\text{KdV}}, u_{\text{KdV}})\|_{L^2([0, t] \times \mathbb{R})} \leq \|(\zeta, u) - (\zeta_{\text{app}}, u_{\text{app}})\|_{L^2([0, t] \times \mathbb{R})} + \|(\zeta_{\text{app}}, u_{\text{app}}) - (\zeta_{\text{KdV}}, u_{\text{KdV}})\|_{L^2([0, t] \times \mathbb{R})}.$$

On peut majorer le premier écart avec le résultat de stabilité avec la proposition III.11 de la partie

précédente, et le second avec la proposition précédente.

Cela permet d'obtenir le théorème final :

**Théorème IV.4**

Si  $f_0 \in H^8$  alors il existe un temps  $T > 0$  tel que pour tout  $\mu \in ]0, 1[$ , il existe une unique solution  $(\zeta, u)$  au système de Boussinesq (7) écrit avec  $\varepsilon = \mu$  pour la donnée initiale  $(\zeta|_{t=0}, u|_{t=0}) = (f_0, f_0)$ .

De plus, pour  $f$  solution de (14), le couple  $(\zeta_{\text{KdV}}, u_{\text{KdV}})$ , défini par :

$$\forall (t, x) \in \left[0, \frac{T}{\mu}\right] \times \mathbb{R}, (\zeta_{\text{KdV}}, u_{\text{KdV}})(t, x) := (f(x - t, \mu t), f(x - t, \mu t)), \text{ vérifie :}$$

$$\forall t \in \left[0, \frac{T}{\mu}\right], \|(\zeta, u) - (\zeta_{\text{KdV}}, u_{\text{KdV}})\|_{L^2([0, t] \times \mathbb{R})} \leq \mu C(T, \|f_0\|_{H^8}).$$

Il semblerait qu'on pourrait aussi obtenir le résultat en norme  $L^\infty$  après avoir dérivé une fois en espace pour chercher une estimation de l'écart dans  $H^1$  et ensuite utilisé l'injection de Sobolev.

Ainsi, nous avons pu estimer l'écart entre la solution au système de Boussinesq (7) et celle donnée par l'équation de KdV : celle-ci en est donc une approximation à l'ordre  $\mu$  d'après cette estimation.

Cela achève la première partie de ce stage qui aura permis de faire une étude des équations des vagues à une dimension d'espace et de déterminer des modèles asymptotiques les approximant. En particulier, les méthodes introduites pour y parvenir ainsi que pour justifier le caractère bien posé du système de Boussinesq seront utiles pour le sujet de thèse qui découlera de ce stage. Celui-ci consistera à l'étude d'un autre modèle asymptotique dont l'équation en une dimension s'écrit  $\sqrt{\text{id} - \partial_x^2} \partial_t u + \partial_x u + \partial_x^3 u + u \partial_x u = 0$ . Il s'agira notamment de déterminer si c'est également une bonne approximation des équations des vagues, s'il est bien posé (localement et globalement) et la régularité nécessaire pour la donnée initiale. Avant cela, les deux derniers mois de ce stage consisteront notamment à voir comment améliorer le développement BKW ayant permis de dériver l'équation de KdV.

Je tiens enfin à remercier Benjamin Melinand et Raphaël Côte de m'avoir proposé ce sujet particulièrement intéressant ainsi que pour leur accueil, leur encadrement régulier et leurs remarques et conseils toujours pertinents. Cela me permettra d'aborder sereinement mon sujet de thèse à la rentrée prochaine.

## Références

- [1] Jerry BONA, Min CHEN et Jean-Claude SAUT : *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media : I. Derivation and Linear Theory*. Journal of Nonlinear Science, 2002.
- [2] Jerry BONA, Min CHEN et Jean-Claude SAUT : *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media : II. The nonlinear theory*. Journal of Nonlinear Science, 2004.
- [3] Raphaël CÔTE : *An introduction to non linear evolution partial differential equations*. Cours de M2 à l'Université de Strasbourg, 2025.
- [4] Vincent DUCHÊNE : *Shallow-water models for water waves*. Cours de M2 à l'Université de Rennes 1, 2020.
- [5] Samer ISRAWI : *Large time existence for 1D Green-Naghdi equations*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 2011.
- [6] Carlos KENIG, Gustavo PONCE et Luis VEGA : *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1993.
- [7] David LANNES : *The Water Waves Problem*. American Mathematical Society, 2013.
- [8] Guido SCHNEIDER et Eugene WAYNE : *The Long-Wave Limit for the Water Wave Problem I. The Case of Zero Surface Tension*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2000.
- [9] Thomas SIDERIS : *Delayed singularity formation in 2D compressible flow*. American Journal of Mathematics, 1995.